

# ÚVOD

## KRÁSA A UŽITEČNOST MATEMATIKY

„Kdyby inteligentní pozorovatel sledoval matematiky při práci, mohl by usoudit, že jde o stoupence jakési podivné sekty hledačů ezoterických klíčů k vesmíru.“

PHILIP DAVIS a REUBEN HERSH: *The Mathematical Experience*

Matematika prostoupila všemi oblastmi vědecké aktivity a sehrává neocenitelnou roli v biologii, fyzice, chemii, ekonomii, sociologii nebo inženýrských oborech. Pomocí matematiky můžeme vysvětlit barvy západu slunce nebo architekturu našich mozků. Matematika nám pomáhá konstruovat nadzvukové letouny i horské dráhy, simulovat čerpání přírodních zdrojů, zkoumat subatomární kvantové jevy i zjišťovat, jak vypadají vzdálené galaxie. Matematika změnila náš pohled na vesmír.

Svou knihou bych chtěl čtenářům zprostředkovat matematiku bez přílišného množství vzorců a takovým způsobem, který podnítl a rozšířil jejich představivost. Témata mé knihy však nejsou pouhými kuriozitami, které nemají pro běžného čtenáře větší hodnotu. Průzkumy amerického ministerstva školství napovídají, že úspěšné absolvování matematiky na střední škole vede k lepším výsledkům na univerzitě, bez ohledu na to, jakou specializaci si student vybere.

Díky *užitečnosti* matematiky můžeme stavět kosmické lodě a zkoumat geometrii našeho vesmíru. Čísla mohou být prvními nástroji naší komunikace s inteligentními mimozemskými bytostmi. Někteří fyzici se dokonce dohadují, že porozumění vyšším dimenzím a *topologii* – studii tvarů a jejich vzájemných vztahů – by nám jednoho dne mohlo otevřít cestu k úniku z našeho vesmíru, až bude končit buď ve vysokých teplotách, nebo ve smrtícím mrazu, a my pak budeme moci svým domovem nazývat celý časoprostor.

V dějinách matematiky se často vyskytují případy, kdy jednu věc objevilo několik lidí zároveň. Jak uvádím v knize *The Möbius Strip* (Möbiova páska), v roce 1858 objevil Möbiovu pásku (úžasně stočený objekt, který má jen jednu stranu) německý matematik August Möbius (1790–1868) současně s dalším Němcem, Johannem Benedictem Listingem (1808–1882). Souběžný objev Möbiovy pásky oběma matematiky stejně jako vynález infinitezimálního počtu (kalkulu) anglickým géniem Isaacem Newtonem (1643–1727) a německým matematikem a filozofem Gottfriedem Wilhelmem Leibnizem (1646–1716) mě přiměly zamyslet se nad tím, proč vlastně tolik objevů ve vědě vzniklo v téže době nezávisle na sobě. Z dal-

ších příkladů si uveďme evoluční teorii, kterou nezávisle na sobě a současně vypracovali britští přírodovědci Charles Darwin (1809-1882) a Alfred Wallace (1823-1913), a objev hyperbolické geometrie maďarským matematikem Jánosem Bolyaiem (1802-1860) a Rusem Nikolajem Lobačevským (1793-1856).

Nejpravděpodobnější je, že takové objevy nastaly souběžně proto, že pro ně dozrál čas a lidstvo v dané době nahromadilo dostatečnou sumu znalostí. Někdy dva vědce nezávisle na sobě podnítí četba téže dílčí výzkumné studie od jednoho z jejich současníků. Mystikové naopak tvrdí, že takové náhody mají hlubší význam. Rakouský biolog Paul Kammerer (1880-1926) napsal: „Dospěli jsme tedy k představě světa jako mozaiky či kosmického kaleidoskopu, který i přes neustálé promíchávání a přeskupování dbá na to, aby podobné bylo propojeno s podobným.“ Události ve světě přirovnal k vrcholům mořských vln, které jako by byly vzájemně izolované a neměly spolu nic společného. Podle jeho kontroverzní teorie si všímáme jen vln, pod povrchem však možná existuje určitý synchronický mechanismus, který jakýmsi tajemným způsobem spojuje události našeho světa, a ty díky němu nastávají společně.

Georges Ifrah se v knize *The Universal History of Numbers* (Univerzální historie čísel) zamýšlí nad souběžností v pasážích o matematice starých Mayů:

Znovu zde vidíme, že národy, které si byly v čase a prostoru značně vzdáleny... došly k velmi podobným, byť nikoli totožným výsledkům... V některých případech můžeme vysvětlení hledat v kontaktech a vlivech mezi různými skupinami lidí... Skutečná příčina však spočívá v tom, co jsme si označili za hlubokou jednotu kultury: inteligence *Homo sapiens* je univerzální a její potenciál je ve všech oblastech světa pozoruhodně stejný.

Starověké národy, jako například staré Řeky, čísla hluboce přitahovala. Mohlo to snad být tím, že v těžkých dobách byla čísla jedinou konstantou neustále se měnícího světa? Pro starořecké pythagorejce byla čísla skutečná, nezměnitelná, uklidňující a věčná - spolehlivější než přátelé a méně hrozivá než Apollón a Zeus.

Řada kapitol mé knihy se zabývá celými čísly. Brilantního matematika Paula Erdőse (1913-1996) fascinovala teorie čísel, což je studium celých čísel, a docela často se mu dařilo přicházet s problémy, které se dají snadno formulovat, avšak jen těžko řešit. Erdős byl přesvědčen, že pokud lze v matematice předložit problém, který zůstane déle než století bez řešení, pak to bude problém z teorie čísel.

Celými čísly lze vyjádřit mnohé aspekty vesmíru. Číselnými strukturami můžeme popsat uspořádání okvětních lístků sedmikrásky, rozmnožování králíků, oběžné dráhy planet, hudební harmonie i vztahy mezi prvky v periodické tabulce. Německý algebraik Leopold Kronecker (1823-1891) jednou řekl: „Celá čísla stvořil Bůh, vše ostatní je dílem člověka.“ Mínil tím, že základním zdrojem celé matematiky jsou celá čísla.

Úloha celočíselných poměrů v hudební harmonii je všeobecně známa už od dob Pythagorových. Důležitější je, že celá čísla hrála klíčovou roli v rozvoji vědeckého chápání světa. Francouzský chemik Antoine Lavoisier (1743-1794) například

objevil, že chemické sloučeniny jsou tvořeny pevně danými poměry prvků, odpovídajícími celočíselným poměrům. Byla to velmi silná indicie pro existenci atomů. První vodítka ke struktuře atomu poskytly celočíselné vztahy mezi vlnovými délkami spektrálních čar emitovaných excitovanými atomy. Téměř celočíselné poměry mezi hmotnostmi subatomárních částic dokazovaly, že atomové jádro se skládá z celočíselného počtu podobných nukleonů (protonů a neutronů). Odchyly od celočíselných poměrů vedly k objevu izotopů (variant prvků s téměř totožnými chemickými vlastnostmi, avšak s rozdílnými počty neutronů).

Drobné odchyly atomových hmotností čistých izotopů od celých čísel potvrdily Einsteinovu slavnou rovnici  $E = mc^2$  i možnost sestrojít atomovou bombu. Celá čísla se v atomové fyzice objevují všude. Celočíselné poměry jsou základními prvky matematické tkáně. Neboli, jak řekl německý matematik C. F. Gauss (1777-1855) - „Matematika je královna věd - a teorie čísel je královnou matematiky.“

Matematický popis vesmíru neustále prohlubujeme a rozšiřujeme, avšak naše mozky a jazykové schopnosti zůstávají takové, jaké jsme dostali od přirozenosti. Neustále se objevují či vytvářejí nové druhy matematiky, my ale potřebujeme nové způsoby myšlení a chápání. V posledních letech se objevují matematické důkazy slavných problémů z dějin matematiky, jejich argumenty jsou ale příliš dlouhé a komplikované, takže si jimi nejsou jisti ani experti. Matematik Thomas Hales musel čekat celých *pět let*, než odborní recenzenti časopisu *Annals of Mathematics* konečně došli k závěru, že v jeho studii z geometrie nenalezli žádné chyby a že časopis může jeho důkaz publikovat, avšak pouze s tou výhradou, že si jeho správností stejně nejsou jisti! Matematici navíc připouštějí, jak to vyjádřil Keith Devlin v listu *The New York Times*, že „matematika dosáhla takového stupně abstrakce, že řadu nových průlomových problémů nedokážou pochopit ani experti“. Pokud mají takové potíže i odborníci, snadno pochopíme, jak těžké je zprostředkovat tento typ informací veřejnosti. Snažíme se, jak nejlépe umíme. Matematikové mohou konstruovat teorie a provádět výpočty, nemusí být ale schopni tyto myšlenky plně pochopit, natož vysvětlit a sdělit.

Namísto je analogie s fyzikou. Zatímco Werner Heisenberg měl obavy, že lidé atomy možná nikdy doopravdy nepochopí, Niels Bohr byl o něco optimističtější. Počátkem 20. let 20. století řekl: „Myslím si, že by se nám to ještě mohlo podařit, během toho se ale možná budeme muset naučit, co vlastně slovo *pochopení* opravdu znamená.“ Dnes používáme počítače, aby nám pomáhaly s usuzováním, které je za hranicemi naší intuice. Experimenty s počítači dokonce přivádějí matematiky k objevům a vhledům, o nichž před nástupem počítačové techniky ani nesnili. Počítače a počítačová grafika matematikům umožňují docházet k výsledkům dlouho předtím, než je mohou formálně dokázat, a otevírají tím celé nové obory matematiky. I tak obyčejné počítačové aplikace jako tabulkové procesory dávají dnešním matematikům moc, za niž by Gauss, Leonhard Euler a Newton dali snad všechno. Máme-li uvést jen jeden příklad, ke konci 90. let přispěly počíta-

čové programy navržené Davidem Baileym a Helamanem Fergusonem k vytvoření nových vzorců, které uvedly do vztahu  $\pi$ , logaritmus 5 a dvě další konstanty. Jak uvedla Erica Klarreichová ve *Science News*, jakmile počítač vytvořil vzorec, bylo už velmi snadné dokázat, že platí. Často je to tak, že *znát* odpověď je největší překážkou při formulování důkazu.

Matematické teorie občas předpověděly jevy, které se potvrdily až o řadu let později. Kupříkladu Maxwellovy rovnice, pojmenované podle fyzika Jamese Clerka Maxwella, předpověděly existenci rádiových vln. Einsteinovy rovnice pole ukázaly na to, že gravitace ohýbá světlo a že vesmír se rozpíná. Fyzik Paul Dirac jednou poznamenal, že abstraktní matematika, kterou zkoumáme dnes, nám dává nahlédnout do fyziky budoucnosti. Právě jeho rovnice přitom předpověděly existenci antihmoty, která byla poté také objevena. Matematik Nikolaj Lobačevskij v podobném duchu uvedl, že „neexistují odvětví matematiky, byť jakkoli abstraktní, která by se jednoho dne nedala aplikovat na jevy reálného světa“.

V následujících kapitolách se setkáme s celým spektrem zajímavých geometrií, které jsou považovány za klíč k vesmíru. „Velká kniha přírody je psána jazykem matematiky,“ napsal Galileo Galilei (1564-1642). Johannes Kepler (1571-1630) vytvořil model sluneční soustavy na základě platónských těles jako krychle nebo dvanáctistěnu. Na fyzika Eugena Wignera (1902-1995) v 60. letech 20. století mocně zapůsobila „nepochopitelná účinnost matematiky v přírodních vědách“. Velké Lieovy grupy jako  $E_8$  - pojednáváme o nich v kapitole „Pátrání po Lieově grupě  $E_8$ “ (2007) - nám jednou mohou dopomoci k vytvoření sjednocené teorie fyziky. Švédsko-americký astrofyzik Max Tegmark v roce 2007 publikoval odborné i populární články o své hypotéze matematického vesmíru, která tvrdí, že celá naše fyzikální skutečnost je matematickou strukturou - jinými slovy, náš vesmír není matematikou jen *popisován* - on sám matematikou je.

## USPOŘÁDÁNÍ A ÚČEL KNIHY

*„Fyzika při každém důležitém kroku vyžadovala a často i podněcovala zavádění nových matematických nástrojů a konceptů. Dnes rozumíme fyzikálním zákonům s jejich extrémní přesností a univerzálností jen díky matematice.“*

MICHAEL ATIYAH: „Tahání za nitky“, *Nature*

Jednou ze společných charakteristik matematiků je jejich vášeň pro úplnost - ono nutkání vracet se při objasňování své práce k základním principům. Čtenáři matematických textů se musí kvůli tomu často přebrodit hromadami stránek různých souvislostí a okolností, než se dostanou k tomu, co vlastně autor zjistil. My se tomu vyhneme, takže každá kapitolka knihy bude krátká a bude mít nanejvýš pár odstavců. Tento formát čtenářům dovolí ponořit se okamžitě do tématu, aniž by se musel probírat dlouhými povídáním. Chcete se něco dozvědět o nekonečnu?

Obráťte na stránku s heslem „Cantorova transfinitní čísla“ (1874) nebo „Hilbertův grandhotel“ (1925) a dostane se vám rychlého duševního cvičení. Máte zájem o první komerčně úspěšnou kapesní mechanickou kalkulačku, kterou vyvinul vězeň nacistického koncentračního tábora? Nalistujte si krátký úvod do tématu v kapitole „Kalkulačka Curta“ (1948).

Zajímá vás, jak mohla jedna legračně pojmenovaná matematická věta dopomoci vědcům k vyvinutí nanovláken pro elektronická zařízení? Přečtěte si kapitolu „Věta o chlupaté kouli“ (1912). Proč nacisté přinutili prezidenta Polské matematické společnosti krmit vši svou vlastní krví? Proč byla zavražděna první žena, o níž je známo, že se zabývala matematikou? Je opravdu možné obrátit kulovou plochu (sféru) naruby? Kdo byl „papežem čísel“? Kdy lidé začali vázat první uzly? Proč už nepoužíváme římské číslice? Kdo byl prvním člověkem v dějinách matematiky, kterého známe jménem? Může mít nějaký povrch jen jednu stranu? To jsou některé z otázek, na které na následujících stránkách podáme odpověď.

Můj přístup má samozřejmě určité nevýhody. Na ploše několika odstavců není možné se do tématu ponořit hlouběji. V oddíle „Poznámky a doporučená literatura“ však přikládám návrhy na další četbu. Někdy sice uvádím primární zdroje, většinou však doporučuji vynikající odkazy ze sekundární literatury, která je přece jen dostupnější než starší primární zdroje. Čtenáři, kteří budou mít zájem určité téma prozkoumat, mohou použít mé odkazy jako dobrý výchozí bod.

Při psaní *Matematické knihy* mě vedl záměr poskytnout širšímu publiku stručného průvodce po významných myšlenkách matematiky a jejich tvůrcích prostřednictvím hesel natolik krátkých, aby je bylo možné projít během pár minut. Faktem bohužel je, že kniha nezahrnuje všechny velké milníky matematiky, protože by byla až příliš obsáhlá. Abych mohl oslavit zázraky matematiky na poměrně omezené ploše, musel jsem řadu důležitých věcí pominout. Věřím ale, že se mi podařilo zařadit většinu z těch, které jsou historicky významné a které měly na matematiku, společnost a lidské myšlení podstatný vliv. Některá hesla jsou zaměřena vyloženě prakticky, od logaritmického pravítka a dalších nástrojů k počítání po geodetickou kopuli a objev nuly. Tu a tam jsem zařadil i několik lehčích, nicméně významných témat, kupříkladu populární Rubikovu kostku nebo řešení problému prostěradla. Občas se některé informace opakují, aby bylo možné každé heslo číst samo o sobě. Navíc je na konci každé stránky krátký oddíl „viz také“, který slouží ke spojení kapitol do propojené sítě, abych čtenáři umožnil využit knihu k zábavné výpravě za objevováním.

*Matematická kniha* ukazuje i mé vlastní intelektuální nedostatky. Snažím se sice studovat celou řadu vědeckých a matematických oborů, seč mi síly stačí, je ale hodně těžké mít v malíčku všechno. Má kniha tak jasně vypovídá o mých osobních zájmech, silných stránkách i slabínách. Za výběr ústředních hesel a samozřejmě za všechny chyby a nepřesnosti jsem zodpovědný jen já. Má kniha není vyčerpávající vědecká disertace, ale spíše oddechová četba pro studenty přírodních věd a matematiky, jakož i pro všechny ostatní zájemce o matematiku. Vítám proto

od čtenářů každou odezvu a návrhy na zlepšení, protože svou knihu považují za projekt v neustálém vývoji a dílo vzniklé z lásky.

Kniha je organizována chronologicky, to znamená podle období či roku určitého matematického mezníku nebo objevu. V určitých případech může literatura udávat mírně odlišná data, protože některé publikace uvádějí jako datum objevu rok jeho zveřejnění, kdežto jiné zdroje udávají dobu vlastního objevu bez ohledu na to, že byl publikován třeba o rok nebo o více let později. Jestliže si nejsem jistý přesným datem, používám raději rok publikace.

Datování hesel může být otázkou, pokud k objevu přispělo více lidí. Tam, kde je to vhodné, většinou používám první známé datum, někdy jsem se ale po dotazech u kolegů rozhodl zařadit heslo pod datum, kdy určitý objev získal na skutečném významu. Uvedme si pro příklad Grayův kód, který se využívá ke korigování chyb v digitální komunikaci, jako třeba u přenosu televizního signálu, kde omezuje vliv šumu v přenosových systémech. Kód se jmenuje podle Franka Graye, fyzika, který v 50. a 60. letech pracoval u Bell Telephone Laboratories. V té době získaly tyto kódy velký význam, zčásti díky jeho patentu z roku 1947 a nástupu moderních komunikací. Heslo Grayův kód tak je pod rokem 1947, třebaže by se dalo zařadit mnohem dříve, protože základy této myšlenky položil už francouzský průkopník telegrafu Émile Baudot (1845–1903). Tak či tak, vždy jsem se snažil, aby v každém hesle nebo alespoň v „Poznámkách a doporučené literatuře“ získali čtenáři pojem o časovém rozpětí příslušného objevu.

Vědci občas vedou spory o to, zda určitý objev učinil skutečně ten, komu je tradičně připisován. Spisovatel Heinrich Dörrie kupříkladu cituje čtyři učence, kteří nevěří, že určitá verze Archimedova hlavolamu nebeského stáda pochází od Archimeda, uvádí ale také jiné čtyři autory, kteří jsou přesvědčeni, že tento problém *by měl být* přisouzen Archimedovi. Badatelé se rovněž prou o autorství údajně Aristotelova paradoxu kol. Pokud je to možné, zmiňuji se o takovýchto sporech buď v hlavním textu, nebo v oddíle „Poznámky a doporučená literatura“.

Snadno si všimneme, že podstatnou část matematických milníků tvoří objevy posledních desetiletí. Uvedme jen příklad z roku 2007, kdy badatelé konečně „vyřešili“ problém hraní dámy a dokázali, že pokud protihráč hraje bez chyb, skončí partie remízou. Jak jsme se už zmínili, zčásti lze zrychlený pokrok matematiky vysvětlit tím, že v matematických experimentech se začalo využívat počítačů. Počítačová analýza problému dámy začala v roce 1989 a jeho kompletní řešení si vyžádalo nasazení stovek počítačů. Dáma má zhruba 500 trilionů možných herních pozic.

Tu a tam v hlavním textu cituji vědecké publicisty nebo proslulé vědce, kvůli stručnosti ale neuvádím zdroj citátů nebo tituly a funkce jejich autorů. Za svůj zhuštěný přístup se předem omlouvám; odkazy na konci knihy by však měly v tomto ohledu vše napravit.

Ošidné může být i pojmenování teorému či věty. Matematik Keith Devlin například ve svém článku pro Americkou matematickou asociaci píše:

Většina matematiků podá za svého života důkaz řady teorémů a proces, v němž každý z nich dostává své jméno, je hodně chaotický. Kupříkladu Euler, Gauss a Fermat dokázali stovky vět a mnohé z nich byly velmi důležité, jejich jmény je ale opatřeno jen několik z nich. Někdy dostávají teorémy zcela zavádějící názvy. Zřejmě nejslavnějším případem je to, že „Velkou Fermatovu větu“ téměř určitě nedokázal Fermat; jeho jméno připojil po Fermatově smrti kdosi jiný k hypotéze, kterou tento francouzský matematik načmáral na okraj stránky jedné učebnice. A Pythagorova věta byla známa dávno předtím, než se Pythagoras objevil na scéně.

Závěrem poznamenejme, že matematické objevy poskytují rámec pro zkoumání povahy skutečnosti a matematické nástroje vědcům umožňují činit předpovědi o jevech ve vesmíru; objevy zachycené v této knize proto patří mezi největší počiny lidstva.

Na první pohled může kniha působit dojmem dlouhého katalogu izolovaných pojmů a lidí bez jasnějších vzájemných souvislostí. Myslím si ale, že během četby se začnou příslušné vztahy a spojení objevovat. Samozřejmě, že konečným cílem vědců a matematiků není pouhé vršení faktů a seznamů vzorců; snaží se o pochopení struktur, organizačních principů a vztahů mezi fakty a na základě toho tvoří teorémy a zcela nové obory lidského myšlení. Matematika je pro mě disciplína, která kultivuje stav neustálého úžas nad povahou myšlení, jeho mezemi a naším místem v rozlehlém kosmu.

Lidské mozky, které se na afrických savanách vyvinuly k tomu, aby nám pomohly uniknout před lvy, se možná svou konstrukcí příliš nehodí k pronikání nekonečným závojem reality. Možná, že matematiku, vědu, počítače, techniky posilování mozkových schopností, ale i literaturu, výtvarné umění a poezii potřebujeme k tomu, aby nám pomohly tyto závoje protrhnout. Těm, kdo se chystají přečíst si *Matematickou knihu* od začátku až do konce, přeji, aby prožívali vzrušení při hledání souvislostí, úžas při pohledu na evoluci idejí a nádhernou plavbu po bezbřehém moři imaginace.