Mnohoúhelníková čísla

trojúhelníky a čtverce

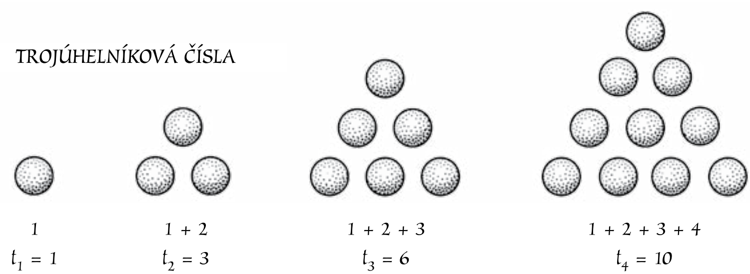
Rovnáním kamínků do trojúhelníků, čtverců a dalších tvarů můžeme odhalit některé fascinující vztahy. Například to, že n-té trojúhelníkové číslo je součtem všech přirozených čísel až po n.

Vypráví se, že když bylo Gaussovi osm, učitel zadal jeho třídě úkol sečíst všechna čísla do 1 do 100 (jejich součet je 100. trojúhelníkové číslo). Sotva se třída pustila do práce, Gauss přinesl učiteli svou tabulku, na níž stálo jediné číslo – 5 050. Učitel se jej v úžasu ptal, jak to udělal. Gauss vysvětloval:

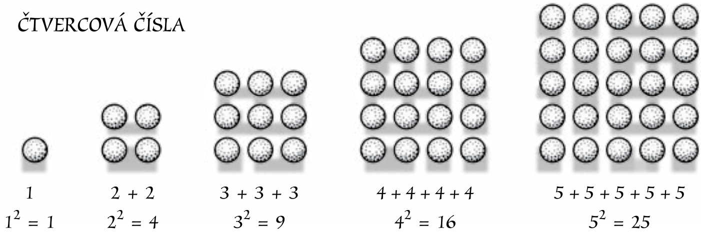
$$\begin{aligned} & 1 + 2 + 3 + \ldots + 50 + 51 + \ldots + 98 + 99 + 100 = \\ &= (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \ldots + (50 + 51) = \\ &= 101 + 101 + 101 + \ldots + 101 = \\ &= 50 \times 101 = 5\,050 \end{aligned}$$

Gaussův vzorec pro n-té trojúhelníkové číslo tedy je $= n/2 \times (n + 1)$.

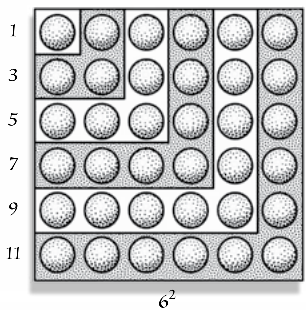
N-té *čtvercové číslo* (n^2) je rovno součtu prvních n lichých čísel nebo součtu $(n - 1)$-tého a n-tého trojúhelníkového čísla (*naproti*).

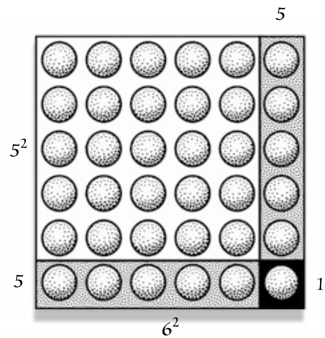


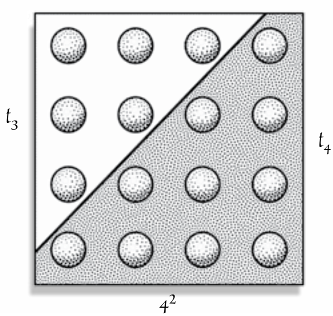
ČTVERCOVÁ ČÍSLA



Prvních pět čtvercových čísel. Tato čísla, stejně jako čísla trojúhelníková (na protější stránce), důkladně zkoumali starověcí pythagorejci, zvláště pak uctívali číslo 10.







Vzorce patrné ve čtvercových číslech:

Nahoře vlevo: Každé čtvercové číslo n^2 je součtem prvních n lichých čísel.
Příklad: $4^2 = 16 = 1 + 3 + 5 + 7$.

Nahoře vpravo: Z toho plyne, že známe-li n^2, pak $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$.

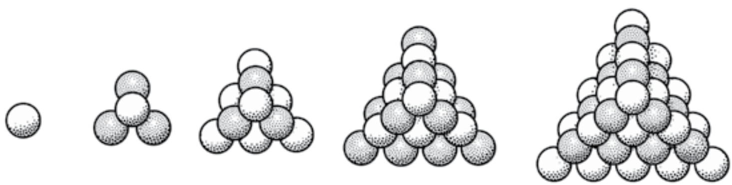
Vlevo: Každé čtvercové číslo n^2 je součtem $(n - 1)$-tého a n-tého trojúhelníkového čísla.
Příklad: $4^2 = 16 = 6 + 10$.

Mnohostěnná čísla

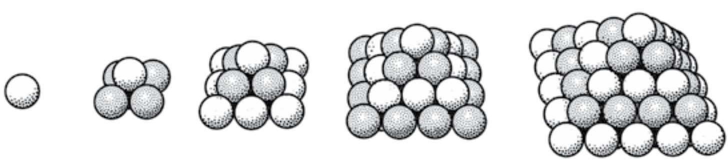
jablka a pomeranče

Skládání pomerančů nebo dělových koulí do krychlí, jehlanů – pyramid a dalších útvarů nám odhalí některé pozoruhodné vztahy mezi trojúhelníkovými, čtvercovými a krychlovými čísly.

Tak například snadno zjistíme, proč *n*-té čtyřstěnové číslo bude součtem prvních *n* trojúhelníkových čísel nebo *n*-té pyramidové číslo bude součtem prvních *n* čtvercových čísel (*dole*); možná překvapivější však bude objev, že součet všech krychlových čísel až po *n* je roven druhé mocnině *n*-tého trojúhelníkového čísla (*naproti*).



ČTYŘSTĚNOVÁ ČÍSLA: 1, 4, 10, 20, 35… $N = n(n + 1)(n + 2)/6$.
Jsou součtem prvních n trojúhelníkových čísel.



PYRAMIDOVÁ ČÍSLA: 1, 5, 14, 30, 55… $N = n(n + 1)(2n + 1)/6$.
Jsou součtem prvních n čtvercových čísel.

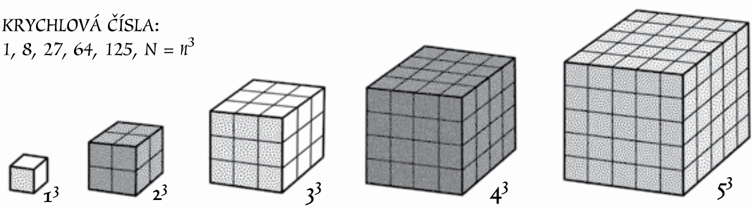
$$1^3 = 1 = 1$$
$$2^3 = 8 = 3 + 5$$
$$3^3 = 27 = 7 + 9 + 11$$
$$4^3 = 64 = 13 + 15 + 17 + 19$$
$$5^3 = 125 = 21 + 23 + 25 + 27 + 29$$
$$6^3 = 216 = 31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41$$
$$7^3 = 343 = 43 + 45 + 47 + 49 + 51 + 53 + 55$$
$$8^3 = 512 = 57 + 59 + 61 + 63 + 65 + 67 + 69 + 71$$
$$9^3 = 729 = 73 + 75 + 77 + 79 + 81 + 83 + 85 + 87 + 89$$

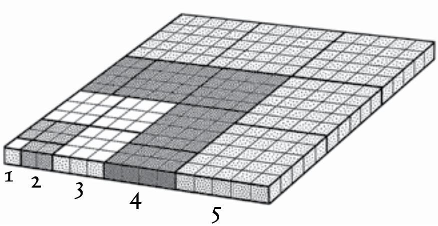
KRYCHLOVÁ ČÍSLA.
Každé krychlové číslo je součtem následné posloupnosti lichých čísel. Toto prosté zjištění má jeden pozoruhodný důsledek zvaný Árjabhatova věta, nazvaná podle indického matematika a astronoma, který ji objevil v roce 499 př. n. l.

$$1^3 + 2^3 = 9 = 3^2 = (1 + 2)^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2 = (1 + 2 + 3)^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225 = 15^2 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2$$
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = 441 = 21^2 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)^2$$

ÁRJABHATOVA VĚTA.
Součet třetích mocnin od 1 do n se rovná druhé mocnině n-tého trojúhelníkového čísla, tj. druhé mocnině součtu prvních n čísel.

KRYCHLOVÁ ČÍSLA:
1, 8, 27, 64, 125, $N = n^3$





Nalevo: Názorný důkaz Árjabhatovy věty. Každá krychle se rozdělí na jednotlivé řady a horní řada sudých krychlí se rozdělí na půlku. Všechny tyto řady se pak sestaví do čtverce.

Pythagorejské trojice

a Velká Fermatova věta

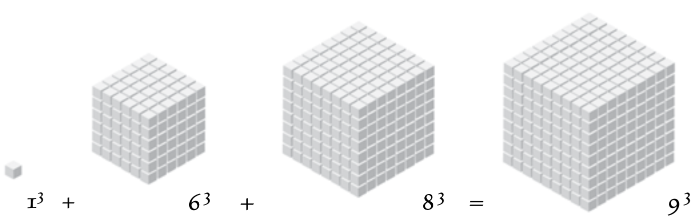
Egyptští stavitelé věděli, že tyče dlouhé 3, 4 a 5 loktů vytvoří pravoúhlý trojúhelník, a hledání dalších celočíselných trojic, které vyhovují pravidlu $a^2 + b^2 = c^2$, se zadávalo za úkol dětem ve starém Babylonu. Takovýmto trojicím čísel říkáme pythagorejské trojice. Eukleides objevil, že všechny je lze vytvořit pomocí následující sady vzorců, v nichž m a n jsou celá čísla taková, že $m > n$:

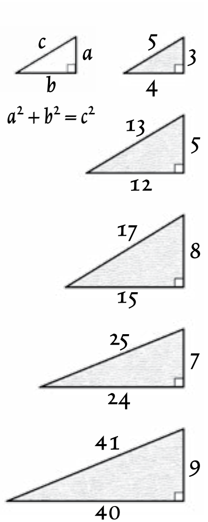
$$a = m^2 - n^2 \qquad b = 2mn \qquad c = m^2 + n^2$$

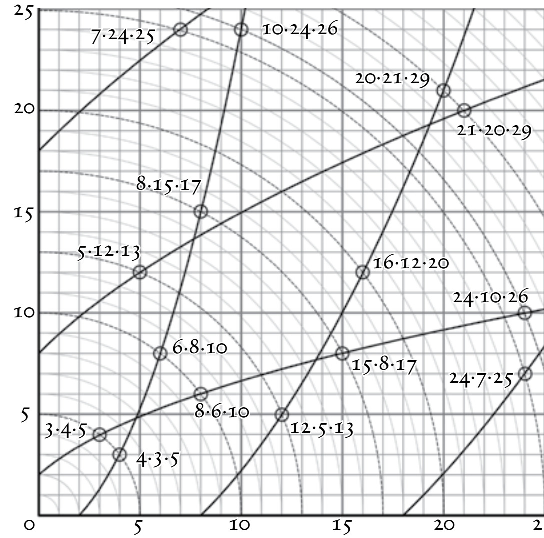
Na protější stránce máme graf pythagorejských trojic s čísly do 30 (*nahoře*) a jejich rozptýlenější diagram s čísly do 500 (*dole*); oba ukazují, že tato čísla leží na dvou sadách podobných parabol.

Co se stane, když místo druhých mocnin dosadíme do rovnice Pythagorovy věty třetí mocniny? Pierre de Fermat si na okraji jedné knihy poznamenal, že nalezl „opravdu podivuhodný důkaz“, že neexistuje žádné řešení rovnice $a^n + b^n = c^n$, kde $n > 2$ a a, b a c jsou kladná celá čísla. Toto jeho tvrzení dokázal až v roce 1995 britský matematik Andrew Wiles.

Žádná třetí mocnina sice nemůže být součtem dvou jiných třetích mocnin, může však být součtem tří takových mocnin. Kupříkladu $2^3 + 17^3 + 40^3 = 41^3$. Také součtem tří čtvrtých mocnin může vzniknout čtvrtá mocnina. Řešení s nejmenšími možnými čísly bylo nalezeno v roce 1987: $95\,800^4 + 217\,519^4 + 18\,796\,760^4 = 20\,615\,673^4$.







Nahoře vlevo: Jednoduché pythagorejské trojice jako 3–4–5 nebo 5–12–13 jsou prvními známými členy těchto pozoruhodných číselných řad. Nahoře vpravo: Každá pythagorejská trojice se nachází tam, kde kružnice znázorňující celá čísla protnou v soustavě souřadnic průsečík čísel a a b. Paraboly spojují trojice se stejnou hodnotou n. Například z n = 1 a m = 2 vzniká trojice 3, 4, 5 a z n = 1 a m = 3 vzniká 8, 6, 10.

Napravo: Zvětšená verze téhož diagramu s čísly a a b do 500. Každá pythagorejská trojice je zobrazena jako tečka.

Naproti dole: Příklad toho, kdy součtem tří třetích mocnin je jiná třetí mocnina: $9^3 = 1^3 + 6^3 + 8^3$. V první kapitole jsme se setkali s Rámanudžanovým „taxíkovým" číslem 1 729, nejmenším číslem, které lze vyjádřit dvěma různými způsoby jako součet dvou třetích mocnin. Můžeme také najít nejmenší čísla, která se dají vyjádřit jako dva různé součty dvou druhých mocnin: $65 = 7^2 + 4^2 = 8^2 + 1^2$ a $125 = 11^2 + 2^2 = 10^2 + 5^2$.