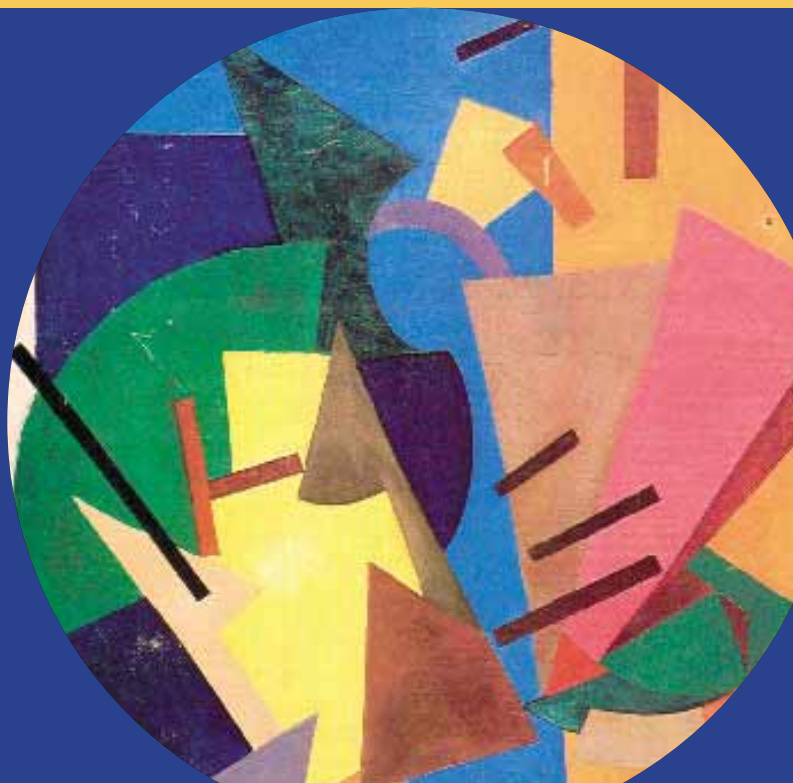


DOKORÁN

Barry Cipra

# CHIBIČKY

A jak je najít dříve než učitel



Všichni děláme chyby. Mladí či staří, géniové nebo hlupáci, studenti a učitelé, prostě všichni. Ti chytřejší z nás se ale snaží své chyby najít a zneškodnit.

Někdy je snadné poznat, že je ve výpočtu chyba, ale není snadné zjistit kde. Kupříkladu:  $-1 = (-1)^3 = (-1)^{6/2} = \sqrt{(-1)^6} = \sqrt{1} = 1$ . Zeptejte se pěti náhodně vybraných osob, zda dokáží určit, která z uvedených pěti rovností je špatně. Možná obdržíte pět rozdílných odpovědí. Budete-li se ptát studentů matematicky orientovaných fakult, obdržíte nejspíše odpovědi dvě, zastoupené přibližně stejným počtem hlasů. Jednota zavládne málokdy.

Chyby ve výpočtech budeme dělat stále, tomu se nelze odnaučit. Lze si však vypěstovat dobré návyky zpětné vazby, to jest položit si otázku, zda výsledek, jenž nám vyšel, dává smysl. Tato knížka vás seznámí humornou a zábavnou formou s rafinovanými způsoby, jak na to.

Doporučená cena 99,- Kč



Barry Cipra, podle vlastních slov „matematik a spisovatel z Northfieldu v Minnesotě“, je respektovaným členem Americké matematické společnosti, pod jejíž hlavičkou již léta vydává každoroční přehledy pokroků v matematice *What's Happening in the Mathematical Sciences*, dále stálým příspěvatelem časopisů *Science* a *SIAM News* a autorem řady článků a publikací. Jeho nejslavnějším dílem však od roku 1983 zůstávají *Chibičky*, vycházející z autorovy dlouholeté pedagogické praxe.

Narodil se roku 1952, po studiu matematiky (PhD) vyučoval na M.I.T, Ohio State University a St. Olaf College. V současnosti se zabývá samostatnou autorskou činností.

Vyřešit matematický problém znamená učinit dva základní kroky: 1) napsat výsledek; 2) položit si otázku, zda výsledek dává smysl. Teoreticky vzato, kdyby byl první krok učiněn přesně jakousi bezchybně pracující, počítači podobnou myslí, pak by byl druhý krok zbytečný. V praxi jsou ale oba kroky podstatné: chyby se objevují, malé i velké, a my si nemůžeme nikdy být jisti jejich absencí, dokud nezkontrolujeme jejich přítomnost. Tato neobvyklá kniha, která je v Americe již po generaci oblíbeným doplňkem klasických učebnic analýzy, se pokouší rozkrýt některá z tajemství druhého kroku. Učitelé ji mají rádi rádi především proto, že skutečně **pomáhá** studentům myslet a ukazovat harmonii a krásu matematiky. Studenti si zase oblíbili její vtip a přímočarý styl.

Praktická příručka je určena studentům prvních dvou ročníků všech vysokých škol, kde se přednáší matematika, učitelům a všem zájemcům o tuto vědu.

edice **bod**

**Barry Cipra**

# **CHIBIČKY**

**A jak je najít dřív než učitel**

**DOKOŘÁN 2002**

Z anglického originálu  
Mistakes... and how to find them before the teacher does...  
přeložil Luboš Pick.

© 2000 A K Peters, Ltd. ALL RIGHTS RESERVED  
Translation © Luboš Pick, 2002

**ISBN 80-86569-26-8**

# Obsah

<b>Slovo překladatele</b> . . . . .	5
<b>Předmluva ke třetímu americkému vydání</b> . . . . .	7
<b>Předmluva</b> . . . . .	9
<b>Slovo k učitelům</b> . . . . .	11
<b>Slovo ke studentům</b> . . . . .	13
<b>1. Integrovaní a chvála pozitivního myšlení</b> . . . . .	14
<b>2. Jak správně a chybně derivovat</b> . . . . .	17
<b>3. Další (a poslední) várka integrálů</b> . . . . .	21
<b>4. Znovu derivace a jemné umění hrubých odhadů</b> . . . . .	31
<b>5. Redukce na speciální případy</b> . . . . .	39
<b>6. Rozměry</b> . . . . .	47
<b>7. Symetrie aneb pořád dokola totéž</b> . . . . .	55
<b>8. Metoda „A co jste čekali?“</b> . . . . .	63
<b>9. Některé často se vyskytující chybičky</b> . . . . .	69
Chybějící znaménka minus . . . . .	71
Mizející závorky . . . . .	71
Ztracené koeficienty . . . . .	72
Vynechané exponenty . . . . .	73
Zlomková inverze . . . . .	74
Výpočty vymknuvší se kontrole . . . . .	75
<b>Doporučená četba</b> . . . . .	77



## Předmluva překladatele

Během svých studií na matfyzu jsem dostal podle svého tehdejšího soudu dobrý a originální nápad. Zaznamenával jsem si chyby, kterých jsem se dopustil já sám, moji spolužáci nebo naši učitelé. Doufal jsem, že až jednou budu mít dostatečně bohatou zásobu, pokusím se z nasbíraného materiálu sestavit dílko, které bude pomáhat čtenářům „prošlapávat slepé uličky“ a upozorní je na pastičky, skrývající se v naší milované zahradě matematiky. Přátelé, kterým jsem svůj záměr oznámil, mi pak ochotně snášeli obzvláště podařené chybné výpočty. Získané chyby jsem dělil na ty, které vedou k nesprávnému výsledku, a na ty (mnohem zákeřnější), které vedou ke správnému výsledku chybným postupem.

Myšlenku jsem nikdy nedotáhl do konce, neboť sbírka nikdy dost nenarostla. Později, když jsem již měl možnost sám vyučovat matematické analýze na našich i zahraničních univerzitách, jsem zjistil, že můj nápad byl sice možná dobrý, ale rozhodně ne originální. Matematikové jsou posedlí chybnými postupy ve výpočtech a skoro každý z nich má databázi rafinovaných a zábavných chyb, které mu přinesl sám život ve formě vlastních výpočtů nebo písemných prací a domácích úkolů jeho studentů.

V roce 2001 jsem se náhodou z časopisu *Notices of the American Mathematical Society* dozvěděl o chybičkám zasvěcené knížce Barryho Cipry, kterého znají například čtenáři oblíbeného časopisu *The Mathematical Intelligencer*. Knižka mne zcela okouzila. Touha sdílet její půvab s kolegy a kamarády mne přivedla k nápadu přeložit ji do češtiny a tím alespoň částečně naplnit svůj dávný sen. Byl jsem příjemně překvapen, když můj návrh vyvolal pozitivní rezonanci u pražského nakladatelství *Dokořán*, které se zaměřuje na vydávání inteligentní literatury.

Ciprova knížka je vtípně napsaná. Odráží letité autorovy pedagogické zkušenosti i jeho jedinečnou schopnost pojednat o zdánlivě suchém a nezábavném tématu odlehčenou formou, která dokáže proměnit i výpočet integrálu ve čtivý literární útvar.

Knížku jsem na několika místech upravil. Čtenář jistě nepřehlédne důslednou domestikaci angloamerických jednotek a nahrazení amerických reálií českými. Několikrát jsem připojil vysvětlující poznámku pod čarou. Autor totiž často cituje skutečnosti z oblasti výuky, které u nás děláme trochu jinak (od našich studentů toho obvykle chceme podstatně více, než je zvykem v USA).

Na závěr bych rád poděkoval několika přátelům, kteří mi při překladu pomohli cennými radami a připomínkami. Jsou to: Zdeněk Kárník, Marek Pečenka, Pavla Picková, Jiří Rákosník a Miroslav Zelený.

*Luboš Pick*

## Předmluva ke třetímu americkému vydání

Během jedné šestiny století, která uplynula od prvního vydání této knížky, prošla výuka základních kurzů matematické analýzy revolucí. „Reforma kalkulu“, která začala jako gerilové hnutí v osmdesátých letech, narostla do obřích rozměrů počátkem let devadesátých. V prudké reakci na to nabralo v polovině devadesátých let páru „hnutí na ochranu kalkulu“. Načrtnu-li situaci ve formě karikatury, k oběma stranám férově stejně nespravedlivé, pak reformní šiky hledaly spásu v počítačích, jejichž okázalá grafika a schopnost chroustat hromady symbolů nepochybně jednou umožní i tomu nejneschopnějšímu studentovi uspět v ponurém hájemství derivací a integrálů. Vybičovaní odpůrci klávesnic v tom ale viděli svrab a neštovice. Snažili se nacpat džina zpět do láhve a častovali se strašidelnými historkami o studentech neschopných násobit desíti bez svých milovaných kalkulaček. „Kalkulus nesmí nadále sloužit jako filtr – měl by se stát pumpou“ nabádalo reformní volební motto (jako kdyby byla výuka matematiky nějakou čistírnou odpadních vod). „Kalkulus není pro každého“ by mohlo naopak znít heslo konzervativců.

Tyto dva pohledy na výuku jsou stále na kordy jako pár bujných beranů bojujících o přízeň ovce.

Stejně jako při jakémkoli jiném pohybu po kružnici, zůstaly po revoluci věci v analýze víceméně při starém. Studenti si stále zoufají a učitelé stále kroutí hlavami nad počínáním svých svěřenců. Zde se může uplatnit tato knížka (i když působí tak trochu jako příslovecná pěst na oko). Ať už budeme analýzu vyučovat jakkoli, chyby tu budou s námi stále. Rozdíl je snad jen v tom, že dříve studenti dělali chyby sami, zatímco nyní mají počítače, aby je dělaly za ně.

Potřeba porozumět významu vzorců a jejich vztahu ke grafickým náčrtkům je však mnohem naléhavější než kdykoli předtím. Obě strany

bitvy o kalkulus přitom chtějí totéž: aby studenti *rozuměli* tomu, co při derivování a integrování vlastně dělají. Liší se pouze v názoru na to, jak tohoto porozumění dosíci.

Když už říkám, že revoluce začala až poté, co byla tato knížka poprvé vydána, rád bych si přisoudil také nějaké zásluhy. Podívám-li se na to ale poctivě, pak mě žádné nenapadají (na druhé straně ovšem mohu bez uzardění popřít jakoukoli vinu). Choval jsem velké naděje, že se z knihy stane vyučovací bomba a bestseller. To se víceméně nepovedlo. Nyní doufám v to, že rozbuška, zatím netknutá, stále tika jako metronom, podobna harmonickému oscilátoru, jehož rovnice  $d^2\theta/dt^2 = \omega^2\theta$  vám jednou exploduje přímo před očima, až vám vyjde špatně znaménko.

Od druhého vydání jsem v textu neudělal žádné zásahy. (Jak bych mohl vylepšit dokonalost samu? A jak uspořádat totální chaos?) Nové prvky představují pouze tato předmluva a pak pár nových položek doporučené četby. Jedna kniha, která se moc nehodí do seznamu, ale o které bych se rád zmínil, je *Tao te ťing*. Její autor, Lao-c', zde vyslovil hlubokou pravdu:

Někteří tvrdí, že mé učení je nesmyslné.  
Jiným se jeví ambiciózní, avšak nepraktické.  
Ale ti, kteří jsou schopni pohledu do svého nitra,  
uzří dokonalý smysl v nesmyslu.  
A ti, kteří mu vdechnou život, pochopí,  
že vysoký peň vyrostl z hlubokých kořenů.

Závěrem bych rád poděkoval několika lidem. Především jsou to Klaus a Alice Petersovi, tedy K a A z vydavatelství A K Peters, Ltd., kteří jsou mi dobrými přáteli po dlouhá léta a kteří představují to nejlepší z matematické publicistiky. Za druhé je to můj syn Mick, jehož vysokoškolské vzdělání, doufám, pokryji z tohoto nového vydání. A konečně je to má žena Kerry, která, smířena se svým údělem, stojí (nikoli bez povyku) po mém boku již po více než čtvrt století.

# Předmluva

Všichni děláme chyby. Mladí či staří, géniové nebo hlupáci, studenti stejně jako učitelé, prostě všichni. Ti chytrější z nás se ale snaží své chyby *najít a odstranit*.

Tato kniha naznačuje, jak hledat a nalézat chyby v úlohách ze základních kurzů matematické analýzy a pozvednout tak své sebevědomí – přinejmenším ve škole.

Vyřešit matematický problém znamená učinit dva základní kroky: 1) napsat výsledek; 2) položit si otázku, zda výsledek dává smysl. Teoreticky vzato, kdyby byl první krok učiněn přesně jakousi bezchybně pracující, počítači podobnou myslí, pak by byl druhý krok zbytečný. V praxi jsou ale oba kroky podstatné: chyby se objevují, malé i velké, a my si nemůžeme nikdy být jisti jejich absencí, dokud nekontrolujeme jejich přítomnost.

Bohužel se zdá, že se na univerzitách vyučuje pouze první krok. Proč? Nebude to tím, že by se učitelé domnívali, že jejich studenti jsou dokonalí. (Posadte se někdy do kterékoli fakultní společenské místnosti na světě, a poznáte, že tomu tak skutečně není.) A také to zcela jistě není tím, že by učitelé sami pracovali bezchybně, a tudíž by si neuvědomovali důležitost kontroly své práce.

Jestli se vám zdá, že vás touto argumentací vedu k nějakému grandióznímu vysvětlení, když jsem úmyslně předtím byl svedl vaši pozornost z cesty dvěma zavádějícími příklady (běžný učitelský trik), tak na to zapomeňte. Já sám totiž odpověď neznám – nevím, proč se druhý krok nevyučuje. Možná je v pozadí celé věci nějaké tajné spiknutí. Možná je za tím CIA. Když ale vezmeme do úvahy, jak fušersky školy učí to, co doopravdy učí, tak je to možná dobře. Je to tak asi lepší.

Tato kniha se pokouší rozkrýt některá z tajemství druhého kroku,

pokud v něm nějaká tajemství jsou. Příklady a metody se často dotýkají chyb, které vznikají při práci na problémech z analýzy. To ovšem nesnižuje jejich význam. Budete-li bedlivě sledovat jejich podstatu a ignorovat můj zmatený výklad, uvidíte, že vám mohou být užitečné.

Možná je chyba už v samotném podtitulku této knihy. Mně jde hlavně o to, abych ukázal, jak chyby *hledat*, ne nutně *nacházet*. Jak uvidíme, existuje řada způsobů jak *poznat*, že jsme někde udělali chybu, aniž bychom věděli, kde a jakou.

Pochopitelně jakmile *víme*, že je někde chyba, tak bychom ji měli *najít* a co nejrychleji *opravit*. To ale může být těžké, zejména v omezeném čase, který máte na odevzdání písemky. Navíc platí kuriózní pravidlo, že se snáze hledají chyby, které učinil někdo jiný. (Skvělý způsob, jak se prokousat touto knížkou, je „oznámkovat“ ji – najděte chyby, přemýšlejte o jejich příčinách, a pak se rozhodněte, kolik bodů mi za ně udělíte.) Jedno vysvětlení spočívá v teorii „nového koštěte“. Když kontrolujete svou vlastní práci, díváme se na ni pokaždé stejnýma očima, zatímco někdo jiný, prostě jenom proto, že je to někdo jiný, se na věc podívá jinýma očima. On bude také dělat chyby, ale jiné!

Zde narážíme na skryté poslání této knížky: aby z vás byl úspěšný řešitel problémů (nejen matematických), musíte se snažit myslet několika různými způsoby – užívat mnoho párů očí, abych tak řekl. Chyby budete dělat pořád – tomu se nelze vyhnout. Ale přistoupíte-li k problému z několika různých stran, uvidíte je v jiném světle, podíváte se na ně z různých úhlů pohledu (mohl bych pokračovat, ale docházejí mi úsloví), pak všechny vaše chyby, jakkoli rafinované, vyplavou na povrch, a vy si je budete moci v klidu opravit.

Na závěr pár slov k překlepům. Nic člověka tolik nefrustruje jako překlep v učebnici. Pilný student si bude dlouhé hodiny zoufat proto, že mu vyšlo plus tam, kde je v knize minus, jen aby mu posléze učitel sdělil, že v knize je prostě jednoduchá chyba. (Kdyby aspoň řekl *pitomá* chyba.) V této knize by překlepy neměly představovat žádný zvláštní problém, neboť formule a vzorečky jsou špatně naschvál. Některé pasáže musely navíc být zformulovány správně a současně srozumitelně. Proto prošla tato knížka zatrceně důkladnou kóntrolou.

## Slovo k učitelům

Touto poznámkou se obracím zejména k učitelům. Vy, studenti, si ji klidně přečtěte, chcete-li, ale není to povinná část knihy. *Tato látka nebude v písemce.*

Tak, učitelé, myslím, že teď jsme zde již sami.

Někteří z vás se možná diví, co to proboha vyvádím. Vždyť matematika je přece věda založená na přesnosti a preciznosti, nebo ne? Řekneme-li studentům, že dělat chyby je v pohodě, nevezmou si to náhodou jako *carte blanche* (tady v poznámce pro učitele si mohou klidně dovolit používat takové vznešené výrazy – a také přerušovat tok myšlenek, jako zrovna teď), takže, kde jsme to přestali? Ano, tedy, nevezmou si to náhodou jako *carte blanche* a nezačnou dělat *veškerou* svoji práci špatně? A neobviní nás posléze z toho, že nejsme o nic lepší, až je budeme chtít opravovat?

Pochybuji o tom. Alespoň dokud to bude učitel, kdo má poslední slovo ve třídě. Šlo mi pouze o to, napsat zajímavou knížku, která by mohla pomoci studentům při studiu matematické analýzy.

Knihy má ovšem navíc jedno závažné poslání, a teď opravdu doufám, že tyto řádky čtou jen učitelé. K tomu, abychom se naučili analýzu, nebo jakýkoli jiný předmět, nestačí prostě jenom vyřešit hromadu příkladů; musíme také *vědět*, co děláme. Příliš mnoho studentů nechává tu část práce, která vyžaduje přemýšlení, na učitelích. Domnívají se, že úkolem studenta je nacpat data do rovnic a vychrlit výsledky, zatímco učitel je placen za to, aby mu to oznámkoval. (Odkud berou tyhle představy, nevíte náhodou?) Příklady, které studenti „řeší“, jsou odtrženy od jakékoli smysluplné reality. V hájemství formalismu sama otázka „Dává to nějaký smysl?“ pozbývá smyslu. Tato kniha se snaží zbavit naši kouzelnou matematickou zahradu zbytečného formalismu

a povzbudit studenty, aby si pobyt v ní patřičně užili. A když na ni občas zaútočí s nůžkami na živý plot, tím lépe. Trocha prořezávání nám nikdy neuškodí.

Původně jsem zamýšlel vyložit v této předmluvě svou filozofii výuky a jejích zásad. Ale poté, co jsem zahodil tři krajně mizerné koncepty, které se dokonce i mně samému zdály chudé na myšlenky a bohaté na prázdné fráze, jsem si uvědomil, že vlastně do celé věci žádný pronikavý vhled nemám. Rozhodně tedy ne takový, který by snesl tiskařskou čerň. Následky tohoto pokusu trpí dílo dosud: příliš dlouhá souvětí, neohrabaný a nafouknutý jazyk (velká slova), vykonstruované příměry a pochybné gramatické vazby (viz například užívání dvojteček). Naštěstí jsem nechal psaní této nejtěžší části knihy až na konec (vysvětlit něco učitelům mi vždy činilo náramné obtíže), takže jsem tím nezatížil zbytek knížky. Ten má také své mouchy, ale tuto ne. Samozřejmě mne mrzí, že nemám více co říci, ale s tím už se nedá nic dělat.



## Slovo ke studentům

Tato kniha je určena k listování, nikoli k systematickému studiu. Ačkoli je možné najít v řazení kapitol jistou logiku, tato logika nemá nic společného s logickou strukturou výuky matematické analýzy. Tak třeba derivace a integrály jsou smíchány dohromady, ač je většina kurzů analýzy od sebe přísně odděluje. Tedy (slovo, kterého si ještě užijete do sytosti), jestliže příklad obsahuje něco, co jste se zatím neučili, jako třeba Besselovy funkce třetího řádu, tak ten příklad přeskočte. Druhá možnost je rozmlátit si hlavu o zeď ve snaze pochopit, o čem je řeč. Vám ani vaší zdi tuto alternativu nedoporučuji.

Ačkoli jsem zařadil na konec každé kapitoly několik cvičení, čímž jsem z knihy udělal opravdovou učebnici matematiky, nejlepším cvičením bude, když se pokusíte vychytat chyby ve své vlastní práci (nejlépe ještě před odevzdáním). Chyby v této knize jsou většinou voleny ad hoc, vymyslel jsem si je proto, abych na nich ilustroval to, co se mi hodilo ilustrovat. Tím pádem některé z nich ztrácejí věrohodnost („tak pitomou chybu by přece nikdo nedělal“). Časem bych je rád nahradil „opravdovými“ chybami, převzatými z písemek a domácích úkolů. Takže máte-li nějaké chyby, na které jste obzvlášť pyšní, pošlete mi je. Vaše příspěvky budou vysoce ceněny nejen mnou, ale snad i budoucími čtenáři.

Závěrem: pokud jste si přečetli Slovo k učitelům (ač vám nebylo určeno), možná stále ještě nechápete, o co mi vlastně jde. Ode mne ovšem vysvětlení nečekejte. Víte, ona ta fráze o „snaze přimět studenty myslet“ má něco do sebe, ale vlastně v podstatě nic moc neznamená. Bylo by krásné, kdyby se této knize dostalo nějaké dalekonosné důležitosti. Než se tak stane, doufejme alespoň, že vám pomůže získat pár bodů navíc při vaší příští písemce.

# 1. Integrovaní a chvála pozitivního myšlení

Kdybyste si měli zapamatovat jedinou věc z analýzy, pamatujte si toto: *určitý integrál měří obsah plochy pod křivkou*. Takže, mimo jiné, určitý integrál z *kladné* funkce musí být *kladný*. Z tohoto důvodu je zřejmé, že někde ve výpočtu

$$\int_{-2}^1 (x^2 + 1) dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 + x \right]_{-2}^{-1} = \frac{-1}{3} - 1 - \frac{8}{3} - 2 = -6$$

je chyba, protože  $x^2 + 1$  je nepochybně kladná funkce. Obdobně špatně je také

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \sin^2 \theta} d\theta &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 \theta} d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = [\sin \theta]_0^{2\pi} = 0 - 0 = 0, \end{aligned}$$

neboť druhá odmocnina je podle definice nezáporná.

Ne každá funkce je pochopitelně nezáporná a také není obvykle možné z pouhého letmého pohledu na funkci ihned určit, zda je nezáporná či není. (Je funkce  $x^2 - 2xy + y^2$  všude nezáporná? A co  $x^2 + 3xy + y^2$ ? A co takhle  $3 + 4 \cos \theta + \cos 2\theta$ ?) Na některé typy problémů je ale kladná odpověď *povinná*. Typickým příkladem jsou úlohy na výpočet plochy nebo objemu. U takto zadaných problémů se záporným výsledkem nesmíte spokojit *nikdy*. Podvádějte, když už to jinak nejde, ale zbavte se znaménka minus! Počítáte-li například plochu sevřenou mezi grafy funkcí sinus a kosinus na intervalu  $0 \leq x \leq \pi$  a vyjde vám

$$P = \int_0^{\pi} (\cos x - \sin x) dx = [\sin x + \cos x]_0^{\pi} = -1 - 1 = -2,$$

**Barry Cipra**

## **CHIBIČKY**

**A jak je najít dřív než učitel**

První vydání v českém jazyce.

Z anglického originálu *Mistakes...*

and how to find them before the teacher does...

přeložil Luboš Pick.

Redakce Marek Pečenka.

Obálka, grafická úprava a sazba Martin Radimecký.

Vydalo nakladatelství DOKOŘÁN s.r.o.,

Kováků 10/788, Praha 5,

dokoran@dokoran.cz, <http://www.dokoran.cz>,

jako svou 20. publikaci.

Vytiskla Akcent tiskárna Vimperk s.r.o.,

Špidrova 49, Vimperk.

Doporučená cena 99,- Kč

ISBN 80-86569-26-8