Kapitola 7

Geometrie bez obrázků

Hodgeova domněnka

Podle zásady, že by autor knihy měl odložit na co možná nejpozdější dobu uvedení čehokoli, co by mohlo uvést čtenáře v zoufalství, jsem při číslování sedmi problémů tisíciletí při psaní této knihy nechal Hodgeovu domněnku na konec. Ve skutečnosti mé pořadí problémů nesouhlasí s tím, jak je uspořádal Clayův ústav. Jejich pořadí bylo založeno na délce názvu, začínalo nejkratším (problém *P* versus *NP*) a končilo nejdelším (Birchova a Swinnerton-Dyerova domněnka), takže celý seznam působil na původním oznamovacím plakátě přitažlivým dojmem vánočního stromečku:

P versus *NP*
Hodgeova domněnka
Poincarého domněnka
Riemannova hypotéza
Yangovy-Millsovy hmotnostní rozdíly
Navier-Stokes: existence a hladkost řešení
Birchova a Swinnerton-Dyerova domněnka

Zvolil jsem jiné pořadí, a to ze dvou důvodů. Za prvé jsem chtěl, aby závěrečné kapitoly mohly využívat dříve uvedeného materiálu. Druhým důvodem byla snaha, aby problémy obtížnější na pochopení přišly na řadu později. (Je prakticky nemožné říci, který z problémů bude těžší vyřešit. Všech sedm se jich dostalo na seznam právě proto, že jsou obecně uznávané jako jedny z nejtěžších existujících nevyřešených otázek.)

Takže jestliže jste sami se sebou spokojeni díky tomu, že jste se prokousali až sem (i když jste se možná museli vyplatit na kauci v polovině kapitoly 6) a po přečtení následující stránky nebo dvou se vám náhle dostaví depresivní pocit, že ničemu nerozumíte, pak prosím nepropadejte zoufalství. Ve skutečnosti – a toto není věc, kterou bych říkal často – bude-li pro vás výklad příliš těžký, pak bude možná nejrozumnější jej vzdát. Hodgeova domněnka, kterou formuloval v padesátých letech dvacátého století britský matematik sir William Vallance Douglas Hodge, je ze všech problémů tisíciletí bezpochyby ten nejnepřístupnější. Jako autora snažícího se vysvětlit problémy milénia čtenáři, který není matematikem, mě tento problém potrápil zdaleka nejvíc. Jde o vysoce technickou otázku, zahrabanou v hlubokém lese vysoce abstraktní pokročilé matematiky srozumitelné jen velmi malému počtu profesionálů. Zabývá se objekty, které jsou na hony vzdáleny jakékoli představě byť i odborníků, takže nejenže neexistují žádné sázkařské kurzy na to, jestli bude domněnka prokázána nebo vyvrácena, neexistuje ale dokonce ani shoda v tom, co vlastně tato domněnka ve skutečnosti říká.

Nevěříte mi, když pravím, že Hodgeova domněnka je daleko horší než kterýkoli z ostatních šesti problémů? Dobrá, zformulujme ji tedy:

> Každá harmonická diferenciální forma (jistého typu) nesingulární projektivní algebraické variety je racionální kombinací kohomologických tříd algebraických cyklů.

Každý, kdo porozuměl alespoň jednomu z technických výrazů v uvedené větě se může postavit do čela třídy.

Dobrá, to bylo trochu nefér. Stejného pocitu hrůzného ohromení jsem mohl dosáhnout formulací kteréhokoli z ostatních šesti problémů, kdybych jej byl hned na začátku příslušné kapitoly uvedl v jeho technické podobě. Potíž u tohoto problému ale spočívá v tom, že je prakticky nemožné vysvětlit, co kterýkoli z oněch technických výrazů znamená.

Přiznávám, že věci začaly vypadat hrozivě už u Birchovy a Swinnerton-Dyerovy domněnky v předcházející kapitole. Tam jsem však měl alespoň možnost problém ilustrovat na jednoduché geometrické úloze. Takže i když se vám možná (jako asi většině čtenářů, jak se domnívám) zdál výklad trochu drsný – možná jste jej dokonce vzdali – měli jste minimálně možnost porozumět počátečnímu přístupu k problému. Mohli jste si třeba říci, že domněnka je obecnější verzí problému s trojúhelníkem daného obsahu, která vzniká, když tento problém zformulujeme v řeči algebraických rovnic a pak se podíváme na rovnice, které mají stejnou obecnou formu. Rozumíte-li věci takto, pořád jste sice ještě dost daleko od toho, jak ji chápe odborník, ale obecný dojem, který získáte, je správný.

U Hodgeovy domněnky ovšem žádná podobná cestička neexistuje, a to ani ke vstupní bráně do problému. Zatímco Birchova a Swinnerton-Dyerova domněnka se nachází jen krůček od srozumitelného problému (i když jde o krok, který zahrnuje spoustu velice těžké matematiky), pro Hodgeovu domněnku nic takového neplatí. Vyjdeme-li z matematických koncepcí, které každý zná ze střední školy, pak cesta k domněnce vyžaduje několik takových kroků. Navíc jde o kroky, které by sklíčily i většinu profesionálních matematiků.

Hodgeova domněnka pravděpodobně nejlépe ze všech problémů tisíciletí ilustruje fakt, který jsem uvedl v kapitole 0, že totiž podstata moderní matematiky neumožňuje laikovi, aby ji náležitě ocenil. Během celého století vršili matematici nové abstraktní teorie na ty již existující, a každý krok je zavedl dále od běžného každodenního světa, na kterém musíme v konečném účtování stavět veškeré naše poznání. Jak jsem již poznamenal výše, nejde tak moc o to, že matematik vytváří nové věci; jde spíše o to, že objekty, jimiž se zabývá, jsou stále abstraktnější a abstraktnější. V případě Hodgeovy domněnky hrají zásadní úlohu operace z kalkulu (derivování, integrování a podobně). Tento kalkulus ale není aplikován na reálná čísla, jak jej znají leckteří studenti středních škol, ba ani na komplexní čísla. Jde o kalkulus, který je prováděn v mnohem obecnějším, abstraktnějším měřítku.

Možná, že pro laika představuje právě ona nepřístupnost nejzajímavější rys problému. Před sto lety bylo možno vysvětlit jakýkoli matematický problém laikovi, který o to projevil zájem. V dnešní době nelze některé problémy vysvětlit ani většině profesionálních matematiků.

Lidský mozek musí tvrdě pracovat, aby se dostal na další úroveň abstrakce. Teprve až když si osvojí jednu úroveň, může z ní abstrahovat na další. To je také jeden z důvodů, proč mladému matematikovi trvá tolik let, než se dostane k hranicím některých odvětví svého oboru. (Existuje pár oblastí, kde tomu tak není, ale zdá se, že ty postupně mizí spolu s tím, jak matematika stále nachází nové způsoby uplatnění abstraktnějších technik k posunu poznání ve zdánlivě konkrétnějších oborech. Jako příklad uveďme aplikaci diferenciálního počtu pro komplexní funkce k důkazům vět o prvočíslech, s níž jsme se setkali v kapitolách 1 a 6.)

Navzdory tomu, co bylo řečeno, se přesto pokusím vysvětlit, co říká Hodgeova domněnka. Něco z toho, co zde řeknu, nevyhnutelně rozzlobí odborníky. Ti ale nepotřebují tuto knihu číst, ne?

V sedmnáctém století ukázal francouzský filosof René Descartes, jak popsat geometrii algebraickými metodami. Místo používání pojmů přímka nebo rovina se můžeme odkázat na množinu všech bodů (x,y), splňujících nějakou rovnici, například

$$y = 3x + 7$$

nebo

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$$

nebo jakoukoli jinou. (První rovnice popisuje přímku, která prochází bodem $(0,7)$ a má sklon 3; druhá definuje přímku procházející bodem $(0,-\frac{1}{2})$ se sklonem $\frac{3}{4}$.) Podobně můžeme místo o kružnici hovořit o množině všech bodů (x,y), splňujících nějakou rovnici, například

$$x^2 + y^2 = 5$$

nebo

$$(x-2)^2 + (y-5)^2 = 81.$$

(První udává kružnici s poloměrem $\sqrt{5}$ a se středem v počátku; druhá kružnici o poloměru 9 se středem v bodě $(2,5)$.) Podle Descartova přístupu mohou být geometrické a logické argumenty, u starověkých Řeků oblíbené způsoby řešení geometrických úloh, nahrazeny algebrou, tedy řešením rovnic. Geometrie prováděná pomocí algebry se obvykle nazývá analytickou geometrií, někdy též na počest Descarta geometrií kartézskou.

Během devatenáctého století posunuli matematikové Descartův přístup o krok dále. Přestali algebru pouze využívat jako nějaké pomocné nářadí pro lepší porozumění geometrickým objektům (sestavováním rovnic, které tyto objekty definují). Namísto toho vyšli ze souborů algebraických rovnic a *definovali* „geometrické" objekty jako množiny bodů řešících tyto rovnice. Nehovořili tedy o tom, že rovnice

$$x^2 + y^2 = 4$$

udává algebraický popis kruhu o poloměru 2 a se středem v počátku; místo toho studovali objekt – ať už je to cokoli – který je touto rovnicí definován. Vyjdeme-li ze známého geometrického objektu, pak tímto způsobem pochopitelně nedostaneme nic nového kromě jiného úhlu pohledu na to, co jsme již znali dříve. Většina rovnic ale žádným známým geometrickým tvarům neodpovídá. Takže nazývat je „geometrickými objekty" nedává žádný smysl. V matematice nazýváme objekty vznikající tímto způsobem z algebraických rovnic „algebraickými varietami". To vlastně není úplně přesně pravda. Když definujeme algebraickou varietu, neomezujeme se jen na jedinou algebraickou rovnici; můžeme začít s jakýmkoli konečným systémem rovnic. Varieta se pak skládá ze všech bodů, které řeší všechny rovnice v systému. Tato možnost činí třídu algebraických variet bohatší než kdyby bylo dovoleno vyjít jen z jediné rovnice. (V případě systému dvou rovnic, z nichž každá definuje známý geometrický tvar, budou variety určené systémem rovnic průnikem těchto dvou tvarů – tedy částmi společnými oběma tvarům.)

Algebraická varieta je tedy zobecněním geometrického objektu. Jakýkoli geometrický objekt je algebraickou varietou, existuje však mnoho algebraických variet, které si geometricky představit nelze. Avšak z toho, že si nějakou varietu nelze představit, ještě nevyplývá, že bychom na ní nemohli uplatnit (algebraickou) geometrii. Tu uplatnit můžeme. Bude to ale geometrie bez obrázků.

Nyní se můžeme zaměřit na jeden z technických termínů v Hodgeově domněnce: nesingulární projektivní algebraická varieta je zhruba řečeno hladký mnohorozměrný „povrch“, který vzniká jako řešení jisté algebraické rovnice. (Asi tak, jako je sféra dvojrozměrným povrchem řešícím algebraickou rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ pro nějaké číslo a.)

Domněnka tvrdí cosi o „harmonických diferenciálních formách“ na těchto „površích“. Harmonická diferenciální forma je, zhruba řečeno, řešení jisté velice důležité parciální diferenciální rovnice, nazývané rovnicí Laplaceovou, která vzniká ve fyzice i při studiu funkcí komplexní proměnné. (Tuto rovnici zformulujeme později.)

Když se studenti na univerzitě poprvé setkávají s kalkulem, jde obvykle o kalkulus v dvojrozměrné rovině, známé rovinné ploše eukleidovské geometrie a elementární trigonometrie. Ale při troše úsilí je možné vybudovat kalkulus i na jiných plochách, kupříkladu na povrchu sféry. Vynaložíme-li hodně veliké úsilí, pak můžeme (nebo lépe řečeno, odborníci mohou) vybudovat kalkulus na mnohem obecnějších typech variet. Hodgeova domněnka se týká kalkulu vybudovaného na nesingulární projektivní algebraické varietě. Tvrdí cosi o jistých typech abstraktních objektů, říkejme jim třeba objekty typu H, které vznikají, když začneme uplatňovat kalkulus na jistém typu variety.

Používáme-li kalkulus (jakožto protipól algebry) k definici nějakého objektu, pak výsledek nemusí nutně vypadat „geometricky“. Hodgeova domněnka tvrdí, že objekty typu H tvoří z tohoto pravidla výjimku – tedy alespoň do jisté míry. Ač samy nemusí být geometrickými objekty, lze je získat z geometrických objektů dosti jednoduchým způsobem, a to bez kalkulu. Řečeno terminologií domněnky, objekt typu H je racionální kombinací kohomologických tříd algebraických cyklů. To znamená, že jakýkoli objekt typu *H* může být odvozen z geometrických objektů čistě algebraickou cestou.

Můžeme tedy chápat Hodgeovu domněnku jako tvrzení, které praví toto: „Podívejte se, my jsme tady pomocí kalkulu na varietách vyrobili jakousi třídu objektů (typu *H*), které nejenže nám upírají jakoukoli naději na to, že bychom si je snad mohli nějak představit, ale dokonce se nenechají popsat ani algebraicky. Na druhé straně však můžeme tyto objekty odvodit algebraickým způsobem z jiných objektů, které algebraicky popsat umíme. Takže nám pořád ještě zůstává určitá nitka, která nás spojuje s pevnou zemí – a tato souvislost nám (myšleno odborníkům) umožní ony objekty studovat dál.“

Posláním Hodgeovy domněnky je toto: nabízí odborníkovi jistou efektní matematickou strukturu, která se hodí ke studiu objektů typu *H*. To je pro moderní matematiku typická situace; vědci totiž neustále hledají nové struktury na známých objektech a nová pojítka mezi různými obory matematiky, aby pak mohli uplatnit metody známé z jedné oblasti v oblasti jiné. (Koneckonců to samé udělal Descartes, když předvedl, jak lze využít algebru při studiu geometrických tvarů.)

Poslední dva odstavce sestávají právě z těch typů tvrzení, které odborníky dohánějí k šílenství. Rád bych poskytl čtenáři alespoň rámcovou představu, o co vlastně jde, a za tím účelem se snažím přeložit do běžné mluvy něco, co je natolik vzdáleno každodennímu životu, že každá podobná snaha je předem odsouzena k nezdaru. Přesto se o to pokusme. Nyní si ukážeme jiný způsob, jak se k problému přiblížit. Jeho výhodou je, že používá pojmy, které se nebudou zdát nesrozumitelné nikomu, kdo studoval diferenciální počet na vysoké škole. Nevýhoda tohoto postupu však spočívá v tom, že, ač je technicky správný, vlastní podstatu Hodgeovy domněnky poněkud míjí.

Při formulaci Hodgeovy domněnky můžeme také začít s integrály definovanými na zobecněných cestách, které leží na nějaké algebraické varietě. Deformací těchto cest se hodnoty integrálů nemění, takže si můžeme myslet, že jsou integrály definovány na celé třídě cest.

Hodgeova domněnka tvrdí, že jestliže se určitá část těchto integrálů rovná nule, potom se v příslušné třídě najde cestička, kterou je možné popsat polynomiální rovnicí.

Jak jsem již poznamenal, tato formulace Hodgeovy domněnky je sice technicky přesná, ale nevystihuje správně jejího ducha. Nyní se pokusím zprostředkovat jistou představu o způsobu, jakým na problém nahlížejí odborníci. Ještě předtím mi však dovolte učinit několik poznámek o postavení domněnky v matematice.

Hodgeova domněnka má především významné aplikace. Její případný důkaz by vytvořil stěžejní pojítko mezi třemi obory, a sice algebraickou geometrií, matematickou analýzou a topologií.

Za druhé, řešení domněnky je v jednom speciálním případě známo, jenomže tento výsledek objevil americký matematik Solomon Lefschetz v roce 1925, tedy dávno předtím, než Hodge zformuloval obecnou verzi své domněnky. Nebudu ani moc přehánět, když řeknu, že se od té doby se žádný zvlášť velký pokrok nedostavil.

Takže k dnešnímu dni je domněnka stále skutečně jen pouhou domněnkou. Leckdo by možná řekl, že přiléhavější název než „domněnka“ by byl „tip nazdařbůh“. To ale neodradilo mnoho matematiků od pokusů o důkaz ani od výzkumu případných důsledků. V roce 1991 vydala Americká matematická společnost knihu katalogizující v té době známé výsledky výzkumu Hodgeovy domněnky.[1] V roce

1996 vyšlo druhé aktualizované vydání, sestávající z 386 hustě popsaných stránek. Toto druhé vydání obsahuje novou sekci se seznamem 71 článků publikovaných mezi roky 1950 a 1996 a týkajících se pouze jediného aspektu problému, Hodgeovy domněnky pro takzvané abelovské variety. V předmluvě autor knihy přiznává, že navzdory tomuto přídavku není přehled stále ještě kompletní, a odkazuje čtenáře na další zdroje.

Mimochodem, kniha Americké matematické společnosti přináší v úvodním odstavci předmluvy následující formulaci, kterou nazývá „populární verzí" Hodgeovy domněnky:

> Nechť X je projektivní algebraická varieta a p je kladné celé číslo. Dále nechť $H^{2p}(X,\mathbb{Q})_{\mathrm{alg}} \subset H^{2p}(X,\mathbb{Q})$ je podprostor algebraických kocyklů, tedy $\mathbb{Q}$-vektorový prostor generovaný základní třídou algebraických podvariet kodimenze p v X. Hodgeova domněnka tvrdí, že je možné „spočítat" podprostor $H^{2p}(X,\mathbb{Q})_{\mathrm{alg}}$ pomocí Hodgeovy teorie, tedy speciálně $H^{2p}(X,\mathbb{Q})_{\mathrm{alg}} \subset H^{p,p}(X) \cap H^{2p}(X,\mathbb{Q})$.

Takže teď už je vám vše jasné.

Pokud se ještě držíte, čeká vás výlet hlouběji do podstaty problému. Zjistíte také, odkud se domněnka vůbec vzala.

Kdo byl William Hodge?

Na matematika s tak prominentní rolí ve svém oboru je toho o Williamu Hodgeovi známo překvapivě málo. Jeho životopis je skoro stejně nedostupný jako jeho domněnka.

Narodil se roku 1903 v Edinburghu. Studoval nejprve v Edinburghu a později v Cambridgi a byl neobyčejně nadaným studentem. V roce 1936, ve 33 letech, mu bylo nabídnuto stálé profesorské místo v Cambridgi, které zastával až do svého odchodu do důchodu v roce 1970.

Jako jedna z vůdčích osobností stál u kolébky vzniku