

## Gödel oznamuje svůj výsledek

Gödel naznačil, jakou revoluci má v rukávu, teprve poslední den konference, jenž byl vyhrazen všeobecné diskusi o přednáškách ze dvou předchozích dnů. Po dobu všeobecné diskuse docela dlouho čekal a pak poznamenal jedinou, bezchybně zformulovanou větou, že je možné, že existují pravdivé, ale nedokazatelné aritmetické výroky, a že navíc dokázal, že existují:

„Lze (předpokládáme-li [formální] konzistenci klasické matematiky) dokonce uvést příklady výroků (a dokonce výroků takových typů jako Goldbachův a Fermatův<sup>4</sup>), které jsou skutečně kontextuálně [materiálně] pravdivé, ale ve formálním systému klasické matematiky nedokazatelné.“

To bylo vše. Důkaz, který se měl stát „slavným důkazem neúplnosti“, byl pravděpodobně proveden již o rok dříve, když bylo Gödelovi 23 let, a v roce 1932 jej předložil jako svou habilitační práci, což je poslední krok zdoluhavého procesu nutného k tomu, aby se člověk stal rakouským nebo německým docentem. Je to jeden z nejúžasnějších výkonů matematického myšlení, jaké kdy vznikly, úžasný jak jednoduchostí hlavní strategie, tak i složitostí detailů, zejména pečlivým překládáním metamatematiky do matematiky pomocí metody, jíž se začalo říkat Gödelovo číslování. Je to zevrubně uspořádané prolínání několika vrstev matematických i metamatematických „hlasů“, kontrastní skládající se v harmonické akordy, jaké do té doby nikdy nezazněly. Hudba zde skýtá vskutku výstižnou metaforu; proto také Ernest Nagel a James R. Newman ve své klasické interpretační práci *Gödelův důkaz*<sup>5</sup> popisují tento důkaz jako „úžasnou intelektuální symfonii“.

Vytvořit takovou matematickou hudbu musel být mimořádně radostný zážitek, zejména když ta matematika zpívala, alespoň v uších svého skladatele, o jeho milovaném platonismu. Ale až do poklidné chvíle v Královci Gödel nedovolil uniknout jediné notě svého symfonického důkazu. Taková bezhlesá, nevýrazná vnějšková podoba skrývající tak mohutný matematický hřmot! A pak Gödel konečně pronesl jednu úsečnou a přesnou větu, utrousil ji uprostřed posledního dne konference vprostřed omílání vystoupení z předchozích dní. Vyrukoval s ní bez fanfár a zahrál ji sotva *pianissimo*.

Toto svérázné „oznámení“ ladí s logikovou osobností. Stručné prohlášení tvořící jeho „hvězdnou hodinu“, jež trvala možná celých 30 vteřin, je pečlivě zkomponované jako miniaturní mistrovské dílo. Sděluje to, co potřebuje sdělit, a ani slovo navíc. Gödel si je musel připravit „do nejmenších podrobností“ (jak ocenil Hahnovy přednášky) a také musel pečlivě uvážit okamžik, kdy s ním vstoupí do diskuse – až na konci tří denní konference, jako s naprostým vyvrácením všech do té chvíle přednesených meta-pozicí. Muž, který naznačoval nepatrnými pohyby hlavy souhlas, nesouhlas, nebo skepsi, se musel domnívat, že nesmírný význam jeho vystoupení zapůsobí na publikum v Královci šokujícím dojmem.

I u těch nejrigoróznějších témat může hrát u přijetí určitých idejí velkou roli způsob přednesení. Vědomí vlastní důležitosti je užitečné – v těžkém vyřezávaném rámu může i skica vypadat důležitě. Nemáme žádné přímé svědectví o tom, jakým způsobem Gödel onoho říjnového dne v roce 1930 vystoupil, do jakého výrazového rámu zasadil to, co bylo matematickou analogií malby zobrazující

podstatu samotné krásy. Ale víme toho o rozhodně necharismatickém Gödelovi a jeho averzi k vnějškové dramatickosti a absolutní víře v sílu logických vývodů dost na to, abychom si mohli představit, jak to probíhalo. Strážlivý popis jádra věci bez jakýchkoli rétorických ozdob či zvýrazněného kontextu, který by posluchačům pomohl pochopit důležitost toho, co se jim sděluje. Žádný *Sturm und Drang*, jen upjatý génius pronášející strohou větu naznačující existenci důkazu nebývalé povahy a rozsahu.

„Čím víc přemýšlím o jazyce, tím víc se divím, že si lidé vůbec rozumí,“ řekl jednou Gödel Mengerovi cestou domů po večeru s „wittgensteinovci“. Takový pesimistický pohled na možnosti komunikace – a to již v tak mladém věku, ještě předtím, než se dočkal nadšeného nepochopení své práce – u něj jistě musel povzbuzovat touhu najít přísně matematický důkaz, jímž by mohl říci vše, co chtěl říci o povaze matematické pravdy a poznání. Nyní takový důkaz měl a oznamoval jeho výsledek, nebo alespoň první dvě věty, které z něho vyplývají. Čekal, že reakcí na jeho výbušné oznámení bude zmatená neochota uvěřit a poté palba otázek? Připravil se svědomitě na požadavky na další objasňování, jež se přirozeně daly očekávat, jak si to představoval Wittgensteinův životopisec?

Gödela měla vždy zklamat schopnost ostatních pochopit závěry, které pro ně pečlivě připravil, a jeho zkušenost v Královci musela znamenat velkolepé zklamání; odpovědí mu totiž bylo hrobové ticho. Přednesl svou bezchybně utvořenou větu... a diskuse pokračovala, jako by se nic nestalo. Ve zredigovaném přepisu diskuse, který vyšel v časopise *Erkenntnis* (redigovali ho Carnap a Reichenbach a šlo o hlavní orgán pro šíření názorů Vídeňského kruhu a Rei-

chenbachovy berlínské skupiny), nenajdeme ke Gödelově příspěvku žádnou debatu. Ani do referátu o konferenci, který napsal Reichenbach, se žádná zmínka o Gödelovi nedostala.<sup>6</sup>

I když vezmeme v úvahu Gödelův anticharismatický způsob bytí ve světě, neměl by jeho příspěvek vyprovokovat vlnu znepokojení, asi takto: „*Promiňte, pane Gödele, ale jaksi jsem získal dojem, že jste právě řekl, že jste dokázal existenci nedokazatelných matematických pravd. To jste samozřejmě nemohl říci, protože kromě toho, že je to v rozporu se všemi našimi názory na povahu matematické pravdy, to zní jako rozpor. Jak byste mohl dokázat, že existují matematické výroky, které jsou nedokazatelné a pravdivé zároveň? Nebyl by ten důkaz tím, že by ukázal, že jsou pravdivé, zároveň jejich důkazem, čímž by vyvracel vaše tvrzení, že důkaz dokazuje, že jsou nedokazatelné? Jako logik nemůžete tvrdit něco tak očividně rozporného. Co jste tedy doopravdy řekl?*“

Vedoucí Gödelovy dizertace Hans Hahn byl v Královci také, dokonce předsedal poslední den diskusi. Neprozradil mu Gödel nic o svém důkazu neúplnosti? S jistotou to nevíme. Hao Wang píše, že Gödel dokončil svou dizertaci, důkaz úplnosti pro predikátovou logiku (tj. průzračnou logiku), aniž by ji Hahnovi ukázal. Tato práce se v době konference připravovala ke zveřejnění (a tou dobou už ji Hahn nejspíš četl). Ve svých úvodních poznámkách k dizertaci, jež z neznámých důvodů ve zveřejněné verzi chybí, Gödel zmínil možnost neúplnosti aritmetiky, nijak ale nenaznačil, že ji dokázal. Hahn musel tuto poznámku číst a nebrat ji vážně. Možná právě on poradil mladému autorovi, aby ji vyškrtl. Možná nechtěl, aby jeho student vyrukoval na veřejnost s něčím tak odvážným, aniž by se opíral

o důkaz, o kterém se z toho, co mu Gödel řekl (nebo hlavně *neřekl*), domníval, že ho nemá.

Další člověk na konferenci, od něhož by se dalo očekávat, že bude na Gödelovo vystoupení reagovat, byl Rudolf Carnap. Měl víc času než ostatní vstřebet Gödelovu novinku, protože Gödel se mu s ní svěřil už před několika týdny. Podle Carnapova *Aufzeichnungen* v jeho *Nachlassu* se 26. srpna 1930 setkal s Gödelem, Feiglem a Waismanem ve vídeňské Café Reichsrat, aby se dohodli na cestě do Královce. Poté, co vyřídili praktické záležitosti, se diskuse stočila, řečeno Carnapovými slovy, ke „Gödelovu *Entdeckung: Unvollständigkeit des Systems der PM; Schwierigkeit des Widerspruchsfreiheitsbeweises* – Gödelovu objevu: neúplnosti systému *Principia Mathematica*. Obtížnost důkazu konzistence.“ (Všimněme si, že zde říká „obtížnost“, nikoli ještě nemožnost. Gödel plně dokázal svou druhou větu až po konferenci.<sup>7)</sup> O tři dny později si Carnap opět zaznamenává, že se tato čtveřice sešla ve stejné kavárně a že než dorazili Feigl a Waismann, „*erzählt mir Gödel von seinen Entdeckungen* – Gödel mi vyprávěl o svých objevech“. Přesto Carnap na konferenci zastával svou starou linii, že konzistentnost je jediným kritériem pro posuzování adekvátnosti formálních teorií matematiky, a otázky úplnosti se vůbec nedotkl. Jak mohl vzhledem ke Gödelovým *Entdeckungen* nepochybovat o svém dřívějším uvažování?<sup>8</sup>

Odpověď je zřejmě taková, že Carnap podstatu Gödelova objevu vůbec nepochopil. Představa, že by kritéria sémantické pravdy bylo možné oddělit od kritérií dokazatelnosti, byla z pozitivistického hlediska tak nemyslitelná, že mu podstata Gödelovy věty vůbec nedošla.

Zpoždění, s nímž Carnap pochopil význam toho, co se mu Gödel pokoušel říci, potvrzuje další zápis v Carnapově deníku, datovaný 7. února 1931, poté, co byl již zveřejněn známý Gödelův článek. „*Gödel hier. Über seine Arbeit, ich sage, dass sie doch schwer verständig ist.*“ Byl tu Gödel. O jeho práci musím říci, že je velmi těžká na pochopení.“

Hrobové ticho, jehož se dočkalo Gödelovo oznámení, se ve zpětném pohledu jeví jako klasický příklad neschopnosti vnímat, kterou popisuje Thomas Kuhn ve *Struktuře vědeckých revolucí*: „Ve vědě... vycházejí novinky na pozadí, které je tvořeno očekávanými výsledky, najevo jen obtížně a narážejí na odpor. Zpočátku je obsahem zkušenosti pouze to, co bylo předjímano a co je obvyklé, a to i tehdy, jsou-li pozorování stejná jako ta, při kterých dojde později k objevu anomálií.“<sup>9</sup>