Předmluva

Co je to matematika? K čemu je dobrá? Co matematici v dnešní době dělají? Cožpak není všechno už dávno hotové? Koneckonců, kolik nových čísel se dá vymyslet? Není současná matematika jen záležitost obrovských výpočtů, při kterých matematik jen krmí a zalévá vzácné počítače jako jakýsi ošetřovatel v ZOO? A když ne, je snad matematika něco jiného než nesrozumitelné výlevy supergéniů s hlavami v oblacích a nohama svěšenýma z pyšných balkonů věží ze slonoviny?

Matematika je tohle všechno, a nic z toho. Většinou je prostě jiná. Není taková, jakou ji čekáte. A i když to zrovna vypadá, že *je* taková, jakou ji čekáte – otočíte se k ní na chvilku zády, a hned se změní. Určitě to není jen pevný soubor znalostí, její rozvoj se neomezuje na vynalézání nových čísel a její skrytá chapadélka pronikají do všech stránek moderního života.

Matematika se mění opravdu velmi rychle. Je to patrné i na historii téhle knížky, která poprvé spatřila světlo světa v roce 1987 pod názvem *Problémy matematiky*. Než skončil rok 1992, nové fundamentální objevy si vynutily druhé vydání. Titul zůstal stejný, ale obálka byla pestřejší, s parádní počítačovou grafikou místo obrazce z barevných špendlíků. A teď už se muselo připravit třetí vydání, s přátelštějším názvem a jinak kladeným důrazem. Mimochodem, nový titul má naznačovat, že matematika v sobě slučuje důležitost v každodenním životě („odsud“) s nekonečně rozmanitou intelektuální tvořivostí („nekonečno“). Důraz je teď kladen spíše na zachycení matematiky v celé její šíři a méně na konkrétní problémy.

Během těch osmi let se toho událo hodně. Nejdramatičtější byl Wilesův důkaz Velké Fermatovy věty ohlášený v roce 1993, ale dokončený až v roce 1995, a to po napínavých peripetiích. Chaos a fraktály přerostly své počátky a rozpatlaly se po tváři vědy, jako když se marmeláda dostane do rukou batolete. Černý Petr zůstal v rukou těch několika zatvrzelých vědců, kteří tvrdili, že chaos je jen počítačová chyba a ve skutečnosti neexistuje. Teorie chaosu se stala velice populární – ale stala se populární právě proto, že je *důležitá*. Klasický přístup k uzlům naprosto nečekaně vykročil jiným směrem a přes noc se jako houby po dešti objevily nové aplikace, například v biochemii DNA a ve Feynmanových diagramech reprezentujících srážky elementárních částic. Z těchto oborů zase přišly nové myšlenky do teorie uzlů, a toto vzájemné obohacování pokračuje a víří křížem krážem matematickým světem. Povedla se kvadratura kruhu, a to doslova: kruh rozřezali na 10^{50} kousků a složili je do čtverce, každý bod přesně na správném místě. Schrödingerova kočka dokázala, že je naživu, a zosnovala převrat v kryptografii. Jeden matematik našel způsob, jak zkonstruovat miliardy a miliardy „Carmichaelových čísel", a trojice dalších ho vzápětí trumfla a stejnou metodou dokázala, že jich existuje nekonečně mnoho. Všechny tyhle příběhy a mnoho podobných najdete na následujících stránkách.

Historie nekráčí vždycky kupředu, matematika se někdy musí uchýlit ke „strategickému ústupu". Důkaz Poincarého domněnky, svatého grálu topologie, byl v prvním vydání ohlášen, ale z druhého vydání vypuštěn, protože jeden z jeho klíčových kroků se zhroutil. Možná se zase objeví ve vydání čtvrtém, v tomhle oboru jeden nikdy neví.[1] Ve druhém vydání byla celá nová kapitola o Keplerově domněnce, podle níž ten nejúspornější způsob naskládání koulí zná každý zelinář. V tomto vydání ji nenajdete, protože navržený důkaz se ukázal jako sporný. Ne snad, že by se zhroutil, spíš zmizel v husté mlze.[2] Přestože je pravda v matematice mnohem ostřeji vymezená než v kterékoli jiné vědě, pořád se mohou

[1] Mohl by se objevit, protože Poincarého domněnka byla podle všeho opravdu dokázána v roce 2004. *Pozn. překl.*

[2] V roce 1998 podal Thomas C. Hales nový, serióznější důkaz. *Pozn. překl.*

vyskytnout spory, které hyzdí její tvář. Jedna ze současných dlouhodobých debat se zaměřuje na takzvanou „experimentální matematiku“ zdůrazňující roli počítačů jako zdroje námětů pro nová tvrzení. Na tom by nic sporného nebylo, kdyby to někteří nebrali jako znevažování obvyklého pojmu důkaz. (*Není* to žádné znevažování, jasné?) Takže teď tu máme nový spor, totiž jestli ten původní spor byl nebo nebyl o pseudoproblému. Nakažlivá záležitost – rozhodně člověka přinutí zamyslet se nad vlastními předsudky. Někteří matematici se sporům vyhýbají, ale spory jsou svým způsobem užitečné – připomínají, že matematiku tvoří lidské bytosti, kterým na ní *záleží*, a to je myslím důležité poselství.

Jednou z charakteristik vědy konce dvacátého století je mizení tradičních hranic mezi obory. Totéž platí pro matematiku. Už nemá smysl ji škatulkovat na algebru, analýzu, geometrii atd. Každá oblast ovlivňuje ty ostatní. Mnoho oborů matematického výzkumu se také obohacuje přímým a aktivním kontaktem s aplikovanými vědami. Často se ty nejzajímavější aplikace objevují v oborech, které nebývaly tradiční doménou matematiky, a využívají přitom části matematiky, které se obvykle za užitečné nepovažovaly.

V malém jsem se s tím setkal při svém vlastním výzkumu. Za prvé, je pro mě skutečně obtížné odpovědět na otázku „v jakém oboru pracujete?“. Pracuji v několika oborech, nebo také v žádném, takže buď mumlám něco neurčitého o „nelineární dynamice“, nebo tazatele obdařím dvacetiminutovou přednáškou. Za druhé, životaschopnost některých mých výtvorů mě samotného občas zaskočí. Před několika lety jsme, můj přítel fyziolog a já, pracovali na velmi teoretických aplikacích teorie grup na klasifikaci různých druhů pohybů zvířat. Před několika týdny jsem se dozvěděl, že inženýři používají naše nápady při konstrukci a ovládání kráčejícího robota. Před čtyřmi lety mi volal strojní inženýr s dotazem o chaosu, a teď máme společnou žádost o patent na přístroj, který kontroluje kvalitu vyrobených pružin.

To je můj osobní mikrokosmos v neustále se rozšiřujícím záběru vědy, a ten pochopitelně ovlivnil můj pohled na matematiku a její roli. Částečně z tohoto důvodu zde najdete subjektivní výběr námětů. V žádném smyslu to není vyčerpávající studie celé matematické vědy – je to jen můj osobní obrázek některých kousků, které přilákaly moji pozornost. Ale věřím, že svůj výběr témat mohu zdůvodnit jejich širším významem. Žijeme ve stále matematičtějším světě. Matematika se někdy považuje za umění, ale myslím, že její myšlenkové postupy mají mnohem blíž k přírodním vědám. Matematika je jedním ze základních kamenů vědeckého snažení a věda a její technický odkaz ovlivňují každého z nás víc, než si uvědomujeme nebo než si vůbec uvědomovat můžeme. Takže se vyplatí pochopit, jaký typ věcí matematici dělají, a moje volba témat, jakkoli subjektivní, bezpochyby poskytuje čtenáři reprezentativní vzorek.

Mým cílem v této knize je zprostředkovat čtenáři co nejlepší zodpovězení otázek, jimiž začíná tato předmluva – co je to matematika, k čemu je dobrá, co matematici dělají, když vytvářejí novou matematiku, a proč jejich práce už dávno neskončila. Přinejmenším vám mohu zaručit, že až dočtete knížku do konce, nebudete si myslet, že matematický výzkum spočívá ve vynalézání nových čísel.

I když, samozřejmě, *někdy*. . .

Coventry 1995 I. N. S.

1
Svět matematiky

Sepsaná já krát tři, třetina mě a pětina mě ke mně přidané, vrátím se naplněná. Jaká je hodnota říkající toto?
Písař Ahmes – Rhindův papyrus[3]

Jedním z největších problémů matematiky je vysvětlit všem ostatním, o čem to vlastně celé je. Technické ozdůbky, symbolismus a formalismus, nepochopitelná terminologie, zdánlivé potěšení ze sáhodlouhých výpočtů: to vše se snaží zastínit skutečnou povahu matematiky. Hudebník by se zděsil, kdyby někdo chtěl jeho umění popsat jako „spoustu puntíků nakreslených na linky". Ale to je přesně to, co necvičené oko vidí na stránce not. Vznešenost, trápení, výbuchy citu a nelad zoufalství – postřehnout je mezi puntíky není vůbec snadný úkol. Jsou tam, ale jsou zakódované. Stejně tak je symbolismus matematiky jen její zakódovanou formou, nikoli podstatou, matematika má také svou vznešenost, trápení a výbuchy citu. Je zde ovšem rozdíl. I neznalý posluchač si může užít hudební kus, jen hráči musejí umět číst v notách. Hudba má okamžitě půvab skoro pro každého. Ale napadá mě jen jediné, co by se dalo považovat za matematické představení, a to renesanční turnaje, při kterých přední matematici sváděli veřejná klání

[3] Podle poněkud neortodoxního překladu do angličtiny Jamese R. Newmana. *Pozn. překl.*

v řešení problémů zadaných soupeřem. Tento nápad by se možná dal výnosně oživit, ale působilo by to asi spíš jako zápas než jako koncert.

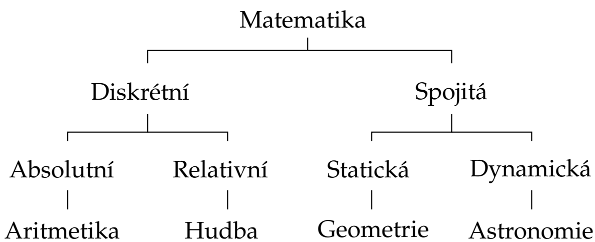
Hudba se dá vychutnat několika způsoby: z pozice posluchače, hráče a skladatele. V matematice není nikdo ekvivalentní posluchači, a i kdyby byl, zajímal by ho spíš skladatel než hráč. Zajímavá je spíš tvorba nové matematiky než její všední praxe. Matematika nespočívá v symbolech a výpočtech, to jsou jen její pracovní nástroje – osminy a trylky a prstové etudy. Matematika *spočívá* v nápadech a hlavně v tom, jak spolu různé nápady navzájem souvisejí. Co musí nutně vyplývat z určitého faktu? Cílem matematiky je porozumění takovým otázkám tím, že se odstraní zbytečnosti a pronikne do jádra problému. Není to jen otázka zjištění správné odpovědi, spíš podstaty toho, proč vůbec existuje nějaká odpověď a proč je taková, jaká je. Dobrá matematika má nádech úspornosti a prvek překvapení, ale především má *význam*.

Suroviny

Předpokládám, že obecně si lidé „typického“ matematika představují jako zahloubaného člověka s brýlemi, který studuje nekonečné výpočty, něco jako superúčetního. Je to jistě tato představa, jež inspirovala jednoho z předních informatiků, aby ve své významné přednášce poznamenal, že „všechno, co se dalo udělat v matematice jen pomocí tužky a papíru, už je hotové“. To je naprostý omyl a mylná je i uvedená představa matematika. Mezi mými kolegy jsou nadšený rogalista, špičkový horolezec, drobný rolník, který si před snídaní vyjíždí ve svém traktůrku, básník a spisovatel detektivek. A žádný z nich zrovna nevyniká v počtech.

Jak jsem řekl, v matematice nejsou důležité výpočty, ale nápady. Jednou někdo vyslovil větu o prvočíslech a prohlásil o ní, že nikdy nepůjde dokázat, protože neexistuje dobré značení pro prvočísla. Carl Friedrich Gauss ji během pěti minut dokázal a (poněkud jízlivě) poznamenal, že „dotyčný potřebuje dobré *nápady*, nikoli *značení*“. Výpočty jsou pouhými prostředky k dosažení cíle. Pokud se věta dokazuje pomocí zdlouhavých výpočtů, výsledek není dokonale pochopen, dokud se nepodaří zjistit důvody, proč výpočty fungují, a nebudou vypadat přirozeně a nevyhnutelně. Ne všechny nápady jsou matematické, ale v dobré matematice nějaký nápad být musí.

Pýthagorás a jeho následovníci rozdělili matematiku do čtyř větví takto:



Tři z těchto čtyř větví zůstávají pro matematiku dodnes hlavními zdroji inspirace, čtvrté – hudbě – se už nepřikládá stejný význam, ale dala by se chápat jako algebraický nebo kombinatorický přístup. (I dnes ale platí, že matematici mívají hudební nadání častěji.) K těmto čtyřem přidala moderní matematika ještě pátou: paní Štěstěnu. Je tedy přinejmenším pět různých pramenů matematických nápadů, jsou to počty, tvary, uspořádání, pohyby a náhody.

Nejzákladnější a nejznámější jsou počty. Původně musel koncept čísla vzniknout z počítání: majetku, dní, nepřátel. Měření délek a vah vedla ke zlomkům a „reálným“ číslům. Velkým dílem matematické imaginace je stvoření „imaginárních“

čísel jako například $\sqrt{-1}$ – od toho okamžiku matematika už nikdy nebyla jako dřív. Tvar neboli forma dává geometrii, nejen stereotypní, pedantický styl geometrie, který býval vyčítán Eukleidovi, ale i novodobé potomky geometrie jako topologii, teorii singularit, Lieovy grupy a teorii kalibračních polí. Neotřelé formy geometrie – fraktály, katastrofy, fibrované prostory, podivné atraktory – stále inspirují k dalšímu vývoji matematiky. Problémy, jak uspořádat objekty podle různých pravidel, vedou ke kombinatorice, části moderní algebry, teorii čísel a tomu, co začíná být známé pod pojmem „konečná matematika“, základ většiny informatiky. Pohyby – dělových koulí, planet a vln – inspirovaly diferenciální a integrální počet, parciální diferenciální rovnice, variační počet a topologickou dynamiku. Mnohé z hlavních oblastí matematického výzkumu se zabývají vývojem systémů v čase. Novější příměsí je náhodnost. Před pouhými několika stoletími se zjistilo, že náhoda má svá vlastní pravidla a pravidelnosti, ale až v posledních padesáti letech se podařilo tato tvrzení upřesnit. Pravděpodobnost a statistika jsou očividné důsledky, méně známá, ale stejně důležitá je teorie stochastických diferenciálních rovnic – dynamika plus náhodná interference.

Hnací síla

Hnací silou matematiky jsou *problémy*. Dobrý problém je ten, jehož řešení nevyjasní pouze nějakou slepou uličku, ale otevře úplně nové obzory. Většina dobrých problémů je těžká: v matematice stejně jako v životě člověk málokdy získá něco za nic. Ale ne všechny těžké problémy jsou dobré: intelektuální vzpírání může být dobré na vypracování mentálních svalů, ale kdo by stál o mozek svázaný svaly? Dalším důležitým zdrojem matematické inspirace jsou *příklady*. Opravdu pěkný samostatný kousek matematiky, který se soustředí na jeden rozumně vybraný příklad, v sobě často skrývá zárodek obecné teorie, ve které se tento příklad stane pouhým detailem, jímž se teorie může, ale nemusí přikrášlit. Kombinaci těchto dvou aspektů ukážu na několika příkladech matematických problémů. Jsou vybrané z různých období pro zvýraznění kontinuity matematického myšlení. Všechny pojmy vysvětlím později.

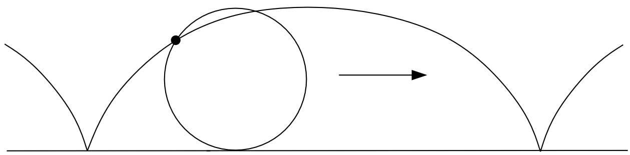
(1) Existuje zlomek, jehož druhá mocnina se rovná přesně 2?
(2) Dá se obecná rovnice pátého stupně vyřešit pomocí radikálů?
(3) Jaký tvar má křivka nejrychlejšího sestupu?
(4) Je jedinou možnou hladkou strukturou čtyřdimenzionálního prostoru ta standardní?
(5) Existuje efektivní počítačový program na nalezení rozkladu čísla na prvočinitele?

Ke každému problému je potřeba nějaký komentář a předběžné vysvětlení, vezmu to popořadě.

První otázku zodpověděli – negativně – staří Řekové. Objev se obvykle připisuje pýthagorejské škole v době kolem roku 550 př. n. l. Byla to důležitá otázka, protože řečtí geometři věděli, že úhlopříčka jednotkového čtverce má délku, jejíž druhá mocnina je rovna dvěma. Tudíž existovaly přirozené geometrické veličiny, které se nedaly vyjádřit jako zlomky (poměry celých čísel). Pověst říká, že na oslavu objevu byla obětována stovka volů. Nemusí to být pravda (od pýthagorejců se nedochovaly žádné dokumenty), ale objev si takovou oslavu zasluhoval. Měl fundamentální vliv na dalších 600 let řecké matematiky, protože přenesl pozornost od aritmetiky a algebry ke geometrii. I přes úžasné objevy řecké geometrie tato asymetrie vážně narušila vývoj matematiky a její důsledky byly stále patrné ještě o 2000 let později, když Isaac Newton a Gottfried Leibniz vynalézali diferenciální počet.

Druhý problém se proslavil v období renesance. *Radikál* je vzorec obsahující pouze obvyklé aritmetické operace (sčítání, odčítání, násobení a dělení) spolu s odmocňováním a *stupeň* rovnice je nejvyšší mocnina proměnné, která se v rovnici vyskytuje. Rovnice stupně 1 a 2 (lineární a kvadratické) efektivně vyřešili staří Babylóňané kolem roku 2000 př. n. l., stupeň 3 a vyšší představoval velmi známý otevřený problém, který odolal všem snahám o vyřešení až do šestnáctého století, kdy kubickou rovnici (třetího stupně) vyřešili Scipione del Ferro z Boloně a Niccolo Fontana (přezdívaný Tartaglia, „Kokta") z Brescie, a brzy poté Lodovico Ferrari našel řešení i pro rovnici čtvrtého stupně. Ve všech těchto případech se jednalo o řešení pomocí radikálů, ale rovnice pátého stupně odolávala všem snahám. V devatenáctém století dokázali dva mladí matematici Niels Henrik Abel a Évariste Galois nezávisle na sobě nemožnost takového řešení. Galoisova práce stimulovala vznik velké části moderní algebry a i dnes je předmětem plodného bádání.

Třetí problém se týká (idealizovaného matematického modelu) pohybu částice, která v gravitačním poli bez tření klouže šikmo dolů po drátě z jednoho (vyššího) bodu do bodu druhého (nižšího). V závislosti na tvaru drátu trvá částici překonání vzdálenosti různou dobu. Jaký tvar drátu odpovídá nejkratší době pohybu? Galileo Galilei v roce 1630 odhadl odpověď špatně (myslel si, že drát má mít tvar kruhového oblouku), Johann Bernoulli položil otázku znovu v roce 1696 a hledal křivku s názvem „brachystochrona": problém vyřešili Newton, Leibniz, Guillaume L'Hôspital, Bernoulli osobně a jeho bratr Jacob. Řešením je obrácená cykloida (trajektorie opsaná bodem na okraji odvalujícího se kola). Tento elegantní problém a jeho úhledné klasické řešení daly vznik variačnímu



Obr. 1 Bod na kraji odvalujícího se kola opisuje cykloidu.

počtu, který bezodkladně způsobil revoluci nejprve v mechanice, a poté v optice. Dodnes zůstává základním kamenem matematické fyziky a jeho vliv je patrný i v kvantové mechanice a obecné relativitě, a stejně tak i v čisté matematice.

Čtvrtý problém je z nedávné sklizně a patří do oblasti diferenciální topologie, která se zabývá multidimenzionálními analogiemi ploch, *varietami*, vybavenými „hladkostí"– takže se dá například rozhodnout, jestli křivka nakreslená na varietu má ostré zlomy, nebo ne. Nejzásadnější otázky se týkají *jednoznačnosti* hladké struktury dané variety. V roce 1963 John Milnor překvapil matematický svět tím, že odhalil více hladkých struktur na sedmidimenzionální sféře, a od té doby byla nalezena různá zobecnění jeho *exotické sféry* i do jiných dimenzí. Nicméně stále se čekalo, že domáčtější variety, zejména běžný n-dimenzionální prostor, by mají pouze *jedinou* hladkou strukturu – tu, ve které všichni provozují diferenciální počet, což se dá i dokázat (ne snadno) pro všechny dimenze kromě 4. Ale v roce 1983 Simon Donaldson ukázal, že vedle obvyklé hladké struktury existuje ve čtyřdimenzionálním prostoru i *exotická* struktura. Ve skutečnosti Donaldson vyřešil poněkud odlišný problém používaje nejnovější představy vzešlé ze spolupráce mezi topologií, algebrou a matematickou fyzikou, ale když se Donaldsonova práce zkombinuje se staršími pracemi Michaela Freedmana, Karen Uhlenbeckové a Clifforda Taubese, vynoří se exotický čtyřdimenzionální prostor.

Pátý problém pochází z novodobého odvětví matematiky známého jako teorie složitosti. Příchod počítačů soustředil pozornost nejen na způsoby, jak vyřešit matematické problémy, ale i na *efektivitu* jejich řešení. Donald Knuth poznamenal, že hlavním rozdílem v přístupu matematika a informatika je to, že první se vůbec, ale ani trochu nestará o *cenu* (v úsilí, času, penězích) řešení. V teorii složitosti je právě cena (měřená v celkovém počtu aritmetických operací) prvořadá. Základním kritériem je, jak moc se cena zvyšuje s růstem velikosti vstupních dat. Obvykle roste buď pomalu (pomaleji než pevná mocnina velikosti vstupů), nebo velmi rychle („exponenciální růst“, kdy se cena násobí určitým faktorem za každý přírůstek velikosti vstupu). Připomeňme, že *prvočíslo* je takové číslo, které nemá žádné dělitele, jako například čísla 11 nebo 29. Každé číslo je součinem prvočísel, ale zdaleka není snadné tato prvočísla najít. Vyzkoušení všech prvočísel jednoho po druhém je procedura, jejíž cena roste exponenciálně s velikostí rozkládaného čísla. Otázka zní: dá se najít efektivnější postup, jehož cena roste jako pevná mocnina? Nikdo nezná odpověď. Řešení není důležité jen pro teorii složitosti, ale také v kryptografii, protože mnohé „teoreticky nerozluštitelné“ vojenské a diplomatické šifry by přestaly být nerozluštitelné, pokud by odpověď byla „ano“.

Dějinná nit

Jedna z věcí, které ilustruje můj výběr problémů, je neobyčejně dlouhá životnost matematických myšlenek. Starobabylónské řešení kvadratických rovnic se má dnes stejně k světu jako před 4000 lety. Variační počet nesl ovoce ponejprv v klasické mechanice, ale přitom kvantovou revoluci přežil bez úhony. Změnil se *způsob*, jak se používá, ale matematické základy nikoli. Galoisovy myšlenky zůstávají v popředí matematického výzkumu. Kdo ví, kam povedou ty Donaldsonovy? Matematici jsou si obecně více vědomi historických kořenů svých myšlenek než vědci z jiných oborů. Není to proto, že by se nic zajímavého v současnosti nedělo – pravý opak je pravdou. Je to tím, že matematické ideje jeví stálost, kterou například fyzikální teorie postrádají.

Na opravdu dobré matematické nápady se přichází těžko. Vznikají kombinací práce mnoha lidí v dlouhém časovém období. K objevům patří i chybné odbočky a slepé uličky. Objevy se nedají dělat na přání, na opravdu novátorskou matematiku se nedá přijít průmyslovým přístupem „výzkumu a vývoje". Ale díky nadčasové platnosti a všestrannosti objevů se takové úsilí vyplatí. Ptolemaiovská teorie sluneční soustavy je pro moderního kosmologa jistě zajímavá z historického hlediska, ale v seriózním výzkumu ji *nepoužívá*. Naproti tomu matematické myšlenky staré tisíce let se denně používají v nejmodernější matematice a vlastně ve všech přírodních vědách. Cykloida byla pro staré Řeky vzrušující kuriozitou, ale neuměli ji k ničemu *využít*. Jako brachystochrona podnítila vznik variačního počtu, Christiaan Huygens ji použil k sestrojení přesných hodin, dnešní inženýři se s ní setkávají při konstrukci ozubených kol, objevuje se v hvězdné mechanice a v urychlovačích částic. To je celkem slušná kariéra pro někoho z tak skromných poměrů.

Ano, ale podívejte se na to takto...

Vedle problémů a příkladů nesmíme opomenout třetí zdroj matematické inspirace: hledání „správného kontextu" pro větu nebo nápad. Matematici nestojí o pouhá „řešení" problémů. Chtějí metodu, ze které řešení jednoznačně vyplyne, něco, z čeho bude vidět, co že se to *doopravdy* děje. Je to poněkud nepříjemný zvyk, ale znovu a znovu prokazuje svou hodnotu.

Například Descartes ukázal, že zavedením souřadnic do roviny se dá každý geometrický problém přeformulovat jako ekvivalentní algebraický problém. Místo hledání, kde se křivky protnou, se řeší soustava rovnic.

Je to ohromný nápad, jeden z těch, které posunuly matematiku o největší kus kupředu. Rád bych vám ale „ukázal", že je úplně bezcenný. Důvod je jednoduchý: je pouhou rutinou, jak *kterýkoli* algebraický výpočet převést na geometrické tvrzení, takže cokoli se dá udělat v algebře, dá se udělat i ve staré dobré geometrii. Descartesovo přeformulování ke geometrii nepřidává absolutně nic. Vidíte? Úplně zbytečné, přesně jak jsem řekl.

Ve skutečnosti ale reformulace přidá mnohé – zejména nový pohled, ve kterém vypadají některé myšlenky mnohem přirozeněji než v původním kontextu. Úpravy, které jsou pro algebraika naprosto smysluplné, mohou geometrovi připadat velice divné, když se přetvoří na sérii geometrických konstrukcí, a totéž platí pro geometrické nápady přeformulované do algebry. V matematice není důležitá jen *existence* důkazu: důležitý je především tok myšlenek, který umožní na důkaz přijít. Nové úhly pohledu mohou silně psychologicky působit, protože otevírají úplně jiné linie útoku. Ano, *posléze* se nové nápady dají zrekonstruovat v řeči starých, ale pokud by se zůstalo u původního přístupu, vůbec by se na ně nepřišlo, takže by nebylo z *čeho* rekonstruovat.

Tento bod bývá často špatně chápán i v dnešní osvícené atmosféře. Kritici „nestandardní analýzy" – která pracuje se skutečnými nekonečně malými veličinami (viz kapitola 6) – obvykle namítají, že pokud se dá věta dokázat nestandardní analýzou, dá se dokázat i pomocí tradiční „standardní" analýzy. Mají pravdu, ale nedošla jim pointa. Ta opět nespočívá v existenci důkazu v rámci daného kontextu, ale v tom, zda se k důkazu dojde přirozeným tokem myšlenek, zda by někoho vůbec mohl *napadnout*.

Když se využije Descartesova spojitost mezi geometrií a algebrou, lze poměrně přímočaře dokázat, že se úhel nedá rozdělit na třetiny pomocí pravítka a kružítka. Tento problém zůstával otevřený přinejmenším od doby pozdních řeckých komentátorů z období kolem roku 600 n. l. až do roku 1837, kdy Pierre Wantzel našel algebraický důkaz, že je trisekce úhlu nemožná. V *principu* se dá každý krok Wantzelova důkazu přepsat jako věta z geometrie – tak proč na něj Řekové nepřišli? Nebo kdokoli jiný za víc než dva tisíce let? Protože ve skutečnosti je jen jediný způsob, jak by někdo mohl tento geometrický důkaz objevit, a sice vyjít z Wantzelovy algebry.

Jak jsem řekl, lidé často špatně chápou toto neustálé hledání nových formulací, nových pohledů na věc a nových interpretací starých výsledků a myšlenek. Často vyčítají matematikům, že se snaží o přeformulování problémů, jen aby oddálili okamžik, kdy je budou muset skutečně začít *řešit*. Je pravda, že nemá smysl jinak formulovat problém, když se tím nezjistí nic nového. Ale je důležité nečekat převratné výsledky okamžitě. Tomuto způsobu myšlení říkám „problém Rolls-Royce“ nebo také „nenasytův efekt“. Představte si, že vás zítra napadne něco opravdu skvělého na vylepšení automobilu – řekněme použití alkoholu jako pohonné hmoty nebo instalace elektromotoru. Odpůrci vašeho přístupu by ihned požadovali, abyste dokázali jeho výhody a sestavili – ihned – auto lepší než Rolls-Royce. Samozřejmě, že to nejde – i kdyby váš nápad byl opravdu lepší, konstrukce Rolls-Royceu je výsledkem víc než půl století strojírenství, a vy byste měl dokázat něco lepšího přes noc a bez prostředků. Svět je přesně z tohoto důvodu plný zastaralých věcí – Volkswagen Brouk je dodnes převažujícím typem mexických taxíků a průmysl je stále v zajetí programovacího jazyka FORTRAN. Ale když se navrhne nová formulace v oblasti výzkumu někoho jiného (obzvlášť když se použije způsob myšlení, na jaký není moc zvyklý), sázím deset ku jedné, že bude požadovat ospravedlnění novinek postavením matematického Rolls-Royceu. Uvidíme několik takových případů z historie: dopřeji vám potěšení si jich všimnout.

Přes to všechno se styl mění, formulace renovují – a občas se podaří přes noc postavit i ten Rolls-Royce. Konec konců jedná se o matematiku, ne výrobu, a jediná omezení jsou dána lidskou představivostí.

Hlavní proud

Řeka Mississippi měří 3779 km a odvádí vodu z území o ploše 3,21 milionu čtverečních kilometrů. Na mnoha místech vypadá jako bludiště zákrutů a slepých ramen, ale přesto dokáže protéct vlastně napříč celým severoamerickým kontinentem od jezera Itasca v Minnesotě až do New Orleansu v Louisianě. Má přítoky a meandry a mrtvá ramena úplně oddělená od hlavní řeky, ale hlavní řeka je tam také a může se po ní vydat kdokoli schopný postřehnout sílu proudu. Mississippi ústí do Mexického zálivu ohromnou bažinatou deltou se spoustou odnoží a hlavních koryt, jejichž tvar a propojení se neustále mění.

Matematika se v lecčems Mississippi podobá. Má odnože a slepá ramena a menší přítoky, ale má i hlavní proud a dá se zjistit, kde je ten proud – matematická síla – největší. Deltou matematiky je současný výzkum: zvětšuje se, někam se posouvá (i když není vždy jasné kam), a co dnes vypadá jako hlavní koryto, může se zítra ucpat bahnem a být opuštěno. Mezitím může drobný pramínek najednou prorazit bouřlivým přívalem. Ta nejlepší matematika vždy posílí hlavní proud, někdy i tím, že ho odchýlí úplně jiným směrem.

Zlatý věk

Až donedávna patřila většina matematiky, která se vyučovala na školách, do „klasického“ období, z něhož nejmladší byl diferenciální počet (datující se zhruba do roku 1700). I s příchodem takzvané „moderní matematiky“ je většina učiva alespoň sto let stará! Částečně i proto si o matematice leckdo myslí, že je to mrtvý obor, a bývá překvapením, že ještě zbývají nějaké věci k objevování.

Dá se do dějin zasadit Zlatý věk matematiky? Bylo to Eukleidovo období, kdy byly položeny logické základy geometrické argumentace? Vývoj indo-arabské číselné soustavy? Renesanční rozkvět algebry? Descartesova souřadnicová geometrie? Diferenciální a integrální počet Newtona a Leibnize? Úžasná konstrukce přírodní filozofie osmnáctého století přizpůsobující matematiku potřebám astronomie, hydrodynamiky, mechaniky, pružnosti, tepla, světla a zvuku? Existuje-li něco jako zlatý věk matematiky, není to žádné z těchto období – je to současnost.

Během uplynulých padesáti let bylo vytvořeno víc matematiky než ve všech předchozích obdobích dohromady. Existuje víc než 2000 odborných matematických časopisů, ve kterých každoročně vychází přes 30 000 článků (ve více než stu jazycích). V roce 1868 *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (*Ročenka pokroků matematiky*) zmiňovala pouhých dvanáct kategorií matematické aktivity, v *Mathematical Reviews* z roku 1995 je jich víc než 60. Jako měřítko bychom samozřejmě měli použít kvalitu, nikoli kvantitu, ale i podle jejích norem je dnešek zlatým věkem.

Někteří pozorovatelé se ale rozhodli v rozmanitosti a svobodě dnešní matematiky hledat symptomy úpadku a oslabení. Tvrdí, že matematika je roztříštěná do navzájem nesouvisejících specializací, ztratila smysl pro jednotu a netuší, kam směřuje. Mluví o „krizi" matematiky, jako by celý obor najednou nabral špatný směr. Není žádná krize. Současná matematika je zdravá, silná, jednotná a stejně relevantní pro zbytek kultury lidstva, jako byla vždycky. Matematici vědí přesně, kam si myslí, že se svým oborem směřují. Pokud se zdá, že je matematika v krizi, tak jedině proto, že je už příliš velká pro chápání jediného člověka. Proto je těžké získat faktický přehled o tom, co se udělalo a k čemu je to dobré. Nezasvěcenému pozorovateli připadá matematikova záliba v abstraktních teoriích a puntičkářské logice sebestředná a zvrácená, jeho zdánlivý nezájem o skutečný svět připomíná sobecké uspokojení ve věži ze slonoviny. Ale současná matematika není exotická úchylka, je přirozeným pokračováním hlavního proudu matematiky. Je abstraktní a obecná a přísně logická, ale nikoli z perverzity, nýbrž protože se ukazuje, že je to jediný způsob, jak matematiku dělat pořádně. Její součástí jsou četné specializace, stejně jako tomu je v jiných vědních oborech, protože vzkvétá a roste. Dnešní matematice se podařilo vyřešit problémy, které trápily největší mozky uplynulých století, a nejabstraktnější matematické teorie nacházejí nová uplatnění při řešení fundamentálních otázek fyziky, chemie, biologie, informatiky a techniky. Je toto úpadek a oslabení? Pochybuji.