

Kapitola 8

Několik často kladených dotazů

1. Je pravda, že po třicítce je matematik odepsaný?

Tento široce rozšířený mýtus je založen na chybné představě o povaze matematického nadání. Lidé si s oblibou představují matematiky jako génie, a genialitu jako naprosto záhadnou kvalitu, s níž se několik vyvolených narodí a kterou ostatní nemají nejmenší šanci získat.

Vztah mezi věkem a matematickou produktivitou se velice liší případ od případu a je pravda, že mnozí matematici své nejlepší práce uveřejní před třicítkou. Ale velká většina zjišťuje, že jejich znalosti a zkušenosti se během života stále rozvíjejí a tento vývoj po mnoho let více než vyrovnává případné snížení „hrubé síly“ mozku, pokud takový pojem má vůbec smysl. Opravdu není mnoho převratných objevů dosažených matematiky, kteří překročili čtyřicítku, ale to může klidně mít příčiny sociologické. Kdo má k takovým výkonům potřebné schopnosti, bude nejspíš ve čtyřiceti už proslulý svojí dosavadní prací, a tudíž nebude mít ctižádost mladšího a méně zavedeného matematika. Existuje nicméně i řada protipříkladů a někteří matematikové pracují s nezmenšeným nadšením do vysokého důchodového věku.

Obecně není populární představa matematika – možná úžasně inteligentní, ale podivínský, špatně oblečený, ase-

xuální a napůl autistický – nijak lichotivá. Někteří matematici jí do jisté míry odpovídají, ale není nic pošetilejšího než si myslet, že když takoví nejste, nemůžete být v matematice dobří. Ve skutečnosti můžete být za jinak stejných podmínek ve výhodě. Jen velmi malá část studentů matematiky se stane profesionálními badateli. Většina odpadne cestou, například ztratí zájem, nedostanou se na doktorandské studium nebo dokončí doktorát, ale neseženou na univerzitě místo. Mám dojem, a nejsem sám, že mezi těmi, kdo všechny tyhle nástrahy překonají, je menší procento divných zjevů než v původní studentské populaci.

I když zmíněný negativní portrét matematika může být škodlivý tím, že odradí lidi, kterým by se jinak obor líbil a byli by v něm dobří, škoda způsobená slovem „génius“ je záluďnější a možná větší. Tady je jakási nepřiliš propracovaná definice génia: člověk, jenž snadno a mladý dokáže věci, které nesvede skoro nikdo jiný, nanejvýš možná po letech cviku, pokud vůbec. Díla génů v sobě mají cosi zázračného, jako by jejich mozek fungoval nejen efektivněji než náš, ale úplně jinak. Každý rok nebo dva nastoupí v Cambridge do prvního ročníku student, který dovede za několik minut vyřešit problémy, jež většině lidí, včetně těch, kteří ho mají vyučovat, zaberou řadu hodin. Když takového člověka potkáme, můžeme jediné tiše přihlížet a žasnout.

Tihle mimořádní jedinci však nebývají vždycky nejúspěšnějšími matematiky. Chcete-li vyřešit nějaký problém, o který se jiní profesionální matematici marně pokoušeli před vámi, potom mezi mnoha kvalitami, které budete potřebovat, není genialita, jak jsem ji právě definoval, ani nezbytná, ani sama o sobě postačující. Jako extrémní příklad můžeme vzít Andrewa Wilese, který (ve věku mírně přes 40) dokázal Velkou Fermatovu větu (ta říká, že jsou-li x , y , z a n přirozená čísla a n je větší než 2,

potom se $x^n + y^n$ nemůže rovnat z^n) a tím vyřešil nejslavnější otevřený problém celé matematiky. Je bezpochyby velice chytrý, ale není to génius v mém smyslu slova.

Můžete se ptát, jak by mohl dokázat to, co dokázal, bez nějakého zázračného nadání? Odpověď zní, že i když je jeho výkon podivuhodný, není natolik podivuhodný, aby byl nevysvětlitelný. Nevím přesně, co mu umožnilo uspět, ale určitě potřeboval velkou odvahu, odhodlání, trpělivost, široké znalosti těžkých výsledků dosažených jinými, štěstí být ve správnou dobu ve správném oboru a výjimečné strategické schopnosti.

Posledně jmenovaná vlastnost je nakonec důležitější než fenomenální rychlost myšlení: nejhlubší příspěvky v matematice pocházejí často od želv a ne od zajíců. Jak se matematik vyvíjí, zasvěcuje se do tajů svého řemesla, částečně studiem práce jiných a částečně mnoha hodinami sezení a přemýšlení o matematice. To, jestli svoji zručnost dokáže použít k vyřešení známých problémů, záleží do velké míry na pečlivém plánování: zda se snaží o problémy, kde je naděje na úspěch, zda pozná, kdy je lepší jistý směr zkoumání vzdát (to se rozhoduje velice těžko), zda umí načrtnout argument v hrubých rysech dřív, než se podaří doplnit všechny podrobnosti. To vše vyžaduje jistou zralost, která samozřejmě s genialitou není neslučitelná, ale zdaleka ji nedoprovází vždycky.

2. Proč je v matematice tak málo žen?

Je velice lákavé se této otázce vyhnout, protože odpovídat na ni je skvělá příležitost někoho urazit. Nicméně malý podíl žen na matematických katedrách, a to i v dnešní době, je tak nepřehlédnutelný a natolik patří k matematickému životu, že se cítím povinen se k tomu vyjádřit, a to i když neřeknu o mnoho víc, než že je to divné a je to škoda.

Měl bych asi začít tím, že nedostatek žen v matematice je jev statistický. Existují vynikající matematicky a podobně jako jejich mužské protějšky jsou vynikající na mnoho způsobů, v řadě případů včetně geniality. Nejsou známa žádná omezení matematických schopností žen. Člověk se občas dočte, že muži mají lepší výsledky v některých psychologických testech, například v prostorové představivosti, a někdy se to uvádí jako možné vysvětlení převahy mužů v matematice. Ale takové vysvětlení nezní příliš přesvědčivě: prostorová představivost se dá cvičením rozvinout, a i když může pro matematika být užitečná, každopádně není nepostradatelná.

Věrohodnější je vysvětlení sociálními vlivy. Hoch může být na své matematické schopnosti hrdý, kdežto u dívky si člověk umí představit, že se stydí vynikat v oboru pokládaném za neženský. Navíc je málo matematicek, které by si matematicky nadané dívky mohly brát za vzor, a tím se situace sama udržuje. Společenský faktor, jenž by mohl ovlivnit kariéru matematicek v pozdějším stádiu, je to, že matematika víc než jiné vědy vyžaduje určitou posedlost, kterou je obtížné, i když určitě ne nemožné zkombinovat s mateřstvím. Spisovatelka Candia McWilliamsová jednou prohlásila, že každé z jejích dětí ji stálo dvě knihy, ale kniha se aspoň dá napsat i po několikaleté přestávce. Když člověk několik let nedělá matematiku, vyjde ze cviku – a matematické návraty jsou vzácné.

Objevil se také názor, že matematicky dosáhnou produktivní fáze pomaleji než jejich mužské protějšky a to je znevýhodňuje v prostředí, které odměňuje brzké úspěchy. Životopisy mnoha z nejvýznamnějších matematicek tomu odpovídají, i když jejich opožděný rozvoj má hlavně sociální důvody – a zase existuje řada výjimek.

Všechna tato vysvětlení se zdají být nedostatečná. Místo dalších spekulací asi nejlépe udělám, když zmíním, že o tomto problému bylo napsáno několik knih

(viz kapitolu Doporučená četba). Na závěr poznamenám, že situace se zlepšuje: podíl matematické se v posledních letech soustavně zvyšoval a vzhledem k současným celospolečenským tendencím bude tento trend skoro jistě pokračovat.

3. Jak se matematika slučuje s hudbou?

Ačkoliv spousta matematiků je naprosto nemuzikálních a velmi málo hudebníků se zajímá o matematiku, lidé vytrvale věří, že tyto dva obory spolu souvisejí. Proto nikoho nepřekvapí, když je matematik dobrým pianistou, skládá hudbu nebo má rád Bacha.

Mnoho konkrétních příkladů nasvědčuje tomu, že hudba matematiky přitahuje víc než všechny ostatní druhy umění, a z některých studií má vyplývat, že hudební výchova u dětí vede i k lepším výsledkům v přírodovědných předmětech. Je snadné vymyslet přijatelně vypadající vysvětlení, proč by to tak mohlo být. I když abstrakce je důležitá v každém umění, hudba je abstraktní nejzjevněji: velká část požitku při jejím poslechu spočívá ve vnímání, možná ne zcela vědomém, čistých forem, které samy o sobě nemají žádný význam.

Taková souvislost není bohužel podepřena skoro žádnými vědeckými důkazy. Není ani jasné, jaké otázky by se měly řešit. Co bychom se dozvěděli, kdyby někdo shromáždil statisticky významná data, která by dokládala, že matematiků hraje na piáno větší procento než nematematiků s podobnou výchovou a sociálním postavením? Řekl bych, že nějaká taková data by shromáždit šlo, ale podstatně zajímavější by bylo přijít s experimentálně ověřitelnou teorií, která by tuto souvislost vysvětlovala. Pokud jde o statistické důkazy, bylo by cennější, kdyby byly určitější. Jak matematika, tak hudba je velmi různ-

norodá, a člověk se může nadchnout pro některou jejich část a současně být zcela lhostejný ke zbytku. Existují přesnější vztahy mezi vkusem matematickým a hudebním? Pokud ano, byly by mnohem poučnější než pouhá korelace mezi zájmem o hudbu vůbec a o matematiku vůbec.

4. Proč matematiku tolik lidí nesnáší?

Málokdy uslyšíte lidi říkat, že vždycky nesnášeli přírodopis nebo češtinu. Samozřejmě ne každý je z nich nadšený, ale ti, kdo nejsou, většinou dobře chápou, že někdo jiný je. Naproti tomu se zdá, že matematika a předměty s vysokým podílem matematiky jako fyzika nevyvolávají pouhou lhostejnost, ale skutečnou antipatii. Čím to, že mnoho lidí přestane matematické předměty studovat, jakmile to jde, a po zbytek života na ně vzpomíná s hrůzou?

Pravděpodobně to není samotná matematika, co lidi tak děsí, ale zážitky z hodin matematiky – a to už je pochopitelnější. Poněvadž matematika pořád staví jednu vrstvu na druhou, je důležité se jí učit průběžně. Například když nebudete dobře umět násobit dvouciferná čísla, asi vám bude chybět intuice pro pochopení distributivního zákona (probíraného v kapitole 2). Bez toho zřejmě nebudete mít zažité roznásobování závorek ve výrazech typu $(x+2)(x+3)$ a pak nebudete pořádně rozumět kvadratickým rovnicím. A když nerozumíte kvadratickým rovnicím, těžko pochopíte, proč je zlatý řez roven $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

Příkladů podobných posloupností je mnoho, ale držet krok s výukou matematiky znamená víc než jen neztratit technickou zručnost. Jednou za čas přijde nová myšlenka, velmi důležitá a důmyslnější než všechny před ní,

a každá taková představuje nebezpečí, že žák či student začne zaostávat. Zjevný příklad je používání písmen zastupujících čísla, což je pro mnoho lidí matoucí, ale v celé matematice od jisté úrovně výš je to věc naprosto základní. Další příklady jsou záporná čísla, komplexní čísla, trigonometrie, umocňování, logaritmy a počátky diferenciálního a integrálního počtu. Přijetí takové myšlenky vyžaduje určitý konceptuální skok a ti, kdo ho při setkání s ní nezvládnou, se pak cítí nejistě z veškeré matematiky na ní vybudované. Postupně si zvykají, že učitelé matematiky rozumějí jen napůl, a když zmeškají několik dalších takových skoků, zjistí, že i poloviční porozumění je příliš optimistickým hodnocením situace. Přitom vidí, že jiní v jejich třídě nemají s matematikou sebemenší potíže. Není divu, že pro mnohé se hodiny matematiky stanou utrpením.

Je takový stav nevyhnutelný? Jsou někteří lidé prostě odsouzeni k tomu, aby matematiku nenáviděli? Nebo by se předmět dal učit jinak, aby mnohem méně lidí zůstávalo mimo? Jsem přesvědčen, že každému dítěti, které bude od malička individuálně vést dobrý učitel zapálený pro věc, se bude matematika líbit. Z toho samozřejmě hned nevyplývá realistický návrh na školskou reformu, ale přinejmenším to naznačuje, že by způsob vyučování matematiky snad mohl jít vylepšit.

Jedno doporučení plyne z myšlenek, které jsem v této knize zdůrazňoval. Před chvílí jsem proti sobě implicitně stavěl technickou zručnost a porozumění obtížným pojmům, ale zdá se, že téměř každý, komu jde jedno, je dobrý i v tom druhém. A opravdu, jestliže porozumění matematickému objektu je hlavně otázkou zvládnutí pravidel, jimiž se řídí, a ne pochopení jeho podstaty, pak je to přesně to, co bychom čekali – rozdíl mezi technickou zručností a porozuměním matematickým pojmům je méně zřetelný, než by si člověk mohl myslet.

Jak by se toto pozorování mělo projevit ve výuce? Ne-propaguji žádnou revoluční změnu – matematika jich už utrpěla příliš mnoho, ale malý posun v důrazu by se vyplatit mohl. Představme si například, že žák udělá celkem obvyklou chybu a myslí si, že $x^{a+b} = x^a + x^b$. Učitel, který klade důraz na význam výrazu typu x^a , řekne, že x^{a+b} znamená x vynásobeno samo sebou $(a+b)$ -krát, což je zjevně totéž jako x vynásobeno a -krát a to pak *vynásobeno* x vynásobeným b -krát. Pro mnoho dětí je tahle úvaha bohužel příliš složitá, a každopádně přestane platit, jakmile a nebo b není přirozené číslo.

Takovým dětem by mohl pomoci abstraktní přístup. Jak jsem ukázal v kapitole 2, všechno, co je potřeba vědět o umocňování, se dá odvodit z několika jednoduchých pravidel, z nichž nejdůležitější je $x^{a+b} = x^a x^b$. Pokud se toto pravidlo zdůrazní, pak je zmíněná chyba nejen méně pravděpodobná, ale je mnohem jednodušší ji opravit. Těm, kdo tu chybu udělají, se jednoduše řekne, že zapomněli použít správné pravidlo. Je samozřejmě důležité vědět základní věci, jako že x^3 znamená x vynásobeno x vynásobeno x , ale to lze prezentovat jako důsledek pravidel spíše než jako jejich zdůvodnění.

Přirozeně nenavrhuji, aby se dětem vysvětlovalo, co je abstraktní přístup, ale aby si učitelé byli vědomi jeho důsledků. Nejdůležitější z nich je to, že člověk se může naučit správně používat matematický pojem, aniž by přesně věděl, co znamená. To může znít zavrženíhodně, ale učit, jak se něco používá, je mnohdy snazší, a hlubší porozumění významu, tedy pokud vůbec existuje nějaký další význam kromě způsobu použití, přijde často samo.