

Matematika má pravděpodobně nejdelsí nepřerušenu historii ze všech vědních oborů; jejím jediným soupeřem v tomto ohledu je astronomie. Minulost obou disciplín sahá přinejmenším až ke starověkým Babyloňanům, přičemž znalosti tehdy dosažené jsou významné dodnes. Matematika staví na objevech minulosti stejně jako astronomie. Astronomie je založena na pozorování skutečného světa, zatímco matematika je sdílený společenský myšlenkový konstrukt. Právě myšlenky jsou ale hnací silou astronomie a matematika vznikla ze snahy modelovat skutečný svět – zaznamenávat ubíhající dny, měřit rozlohu polí, počítat daně náležející králi.

V astronomii dochází k revolucím. Staré představy bývají vyvráceny a nahrazeny radikálně novými. Kupříkladu roku 1877 spatřil italský astronom Giovanni Schiaparelli na Marsu *canali* („kanály“); z chybného překladu tohoto objevu se brzy zrodilo všeobecně rozšířené přesvědčení (dokonce i mezi astronomy), že Mars je osídlen inteligentními bytostmi. Dnes jsme již chytřejší. Často se říká, že v matematice k žádné revoluci dojít nemůže, protože podstata matematické pravdy se nemění. Lidské názory se ovšem mění a jednou z nejvýznamnějších revolucí v matematice byla právě zásadní revize našeho pojetí matematické pravdy. Díky Kurtu Gödelovi a Alanu Turingovi dnes již víme, že ani matematická pravda není absolutní.

Během následujících padesáti let budeme svědky několika zásadních matematických revolucí. Některé již probíhají a stojí za nimi rostoucí vliv počítačů a nové potřeby biologických

věd a finančního sektoru. Přijdou i další, ale s jistotou lze předpovědět jedině to, že mnoho jich bude nepředvídatelných. Nejrůznější pozorovatelé předpovídají změnu samotného pojetí důkazu, což je základní kámen matematiky. Někteří z nich říkají, že počítače přinesou dalekosáhlou revizi samotného principu důkazu, jiní tvrdí, že tento koncept zcela zanikne. Oba tyto názory vycházejí ze zásadního neporozumění současným trendům. V matematice zastupuje důkaz funkce experimentu a pozorování, jež jsou součástími ostatních vědních disciplín – prostředky, které badatelům brání, aby se nechali svést na scestí svou vlastní chytrostí a začali věřit čemu si jen proto, že si přejí, aby to byla pravda. Počítače neskoncovaly s potřebou důkazu o nic více, než vynález mikroskopu skoncoval s potřebou experimentu v biologii. Stejně jako v případě této biologické analogie počítač modifikoval a zdokonalil techniky důkazu, ale nezměnil jeho základní filozofii – totiž že důkaz je logicky souvislý příběh, odvozující ze starých teorémů nové způsobem, který snese i to nejpečlivější přezkoumání skeptickými odborníky. Pojetí důkazu a přesvědčení, že důkaz je klíčovou postavou matematického dobrodružství, přečká příštích padesát let bez úhony.

Matematika čerpá svou sílu z kombinace dvou různých zdrojů. Jedním z nich je „skutečný svět“. Kepler, Galileo, Newton a další nám ukázali, že mnohé aspekty vnějšího univerza lze chápat jako rozpracování jednoduchých, avšak rafinovaných matematických pravidel – „přírodních zákonů“. Fyzikové své formulace těchto zákonů čas od času korigují. Newtonovská mechanika je nahrazena kvantovou mechanikou a obecnou relativitou, kvantová mechanika ustoupí kvantové teorii pole a kvantová gravitace a teorie superstrun ukazují směr další budoucí revize. Problémy skutečného světa podněcují zrod nové matematiky a matematika obvykle přetrvává a neztrácí ze své důležitosti, ani když se promění teorie, z níž vzešla.

Druhým zdrojem matematiky je lidská představivost – studium matematiky samo pro sebe. Cesta od skutečného světa k plně vyvinutému matematickému odvětví bývá trnitá a neobejde se bez dobrodružných průzkumů. Každou chvíli se ne-

ohrožení průkopníci odchýlí z vyšlapané cesty, aby následovali své vlastní osobní vize, a vracejí se jako objevitelé daleko lepší trasy. Pro tyto průkopníky je význam průzkumných cest zřejmý – jsou jejich hnací silou a nepotřebují pro ně žádné ospravedlnění mimo to, že jsou zajímavé samy o sobě.

Tyto dva matematické styly se obvykle označují jako aplikovaná matematika a čistá matematika. Ani jedno z těchto slovních spojení není přesné a u obou může dojít k nedorozuměním. Mnohé oblasti „aplikované“ matematiky se totiž nevztahují k ničemu skutečnému, a na druhé straně ryze „čisté“ matematiky je vyjádřením jejich metod, nikoliv opovržením nad praktickou hodnotou této disciplíny. Tyto výrazy však skutečně označují extrémní polohy širokého spektra matematických stylů – kontinua, které poutá řád okolního světa k tajemství lidské představivosti. Právě toto kontinuum a obousměrný provoz myšlenek a nápadů, který v něm proudí, dává matematice sílu. Chceme-li pokračovat kupředu, potřebujeme oba styly, a je proto zcela nesmyslné prosazovat nadřazenost jednoho či druhého.

Ještě před sto lety dokázala většina matematiků toto kontinuum obsáhnout, ale o padesát let později už bylo příliš rozsáhlé pro jakoukoliv jednotlivou mysl. Lidé se začali specializovat, a to vedlo k pochopitelné fragmentaci disciplíny. Matematikové se rozdělili do dvou táborů – aplikované a čisté matematiky – přičemž každý z nich zastával odlišnou filozofii. Neshodli se na základech, na potřebě důkazu, na metodách, ani na tom, které problémy jsou zajímavé. Představovali dvě znepřátelené sekty toho, co kdysi bývalo širokou, všezahrnující církví. Na přelomu tisíciletí však byla tato sebezničující tendence opuštěna. Metody čisté matematiky vdechly aplikované matematice nový život, a problémy, které vyvstávaly v oblasti aplikací, zase podnítily nový rozvoj v čisté matematice. Dělicí čára, vždy spíše potomek ideologie než skutečnosti, se začala rozplývat. Během příštích padesáti let se bude tento trend směrem ke sjednocení zrychlovat a brzy bude existovat zase jen jedna matematika, bez jakýchkoliv vymezujících adjektiv a sektářských rozepří. Stále tu budou specialisté, ale jejich spe-

cializace v sobě budou spojovat abstraktní logiku a koncepční zaměření čisté matematiky s konkrétními zájmy aplikované matematiky. Všichni budeme matematiky, všichni budeme součástí jednoho velkého snažení, a každý budeme okopávat vlastní záhonek rozsáhlé kolektivní „extelligence“ matematického myšlení. Budeme vědět o ostatních kutilech na ostatních záhonecích; budeme vděční za to, že tam jsou, a budeme respektovat jejich činnost coby platný příspěvek k obohacení celku.

Ohledně příštích padesáti let lze s jistotou předpovědět jen jedno – dočkáme se mílových pokroků. Zlatým věkem matematiky nebylo starověké Řecko ani renesanční Itálie nebo newtonovská Anglie; je jím současnost. A totéž bude platit i za padesát let. Názornou demonstrací tohoto tvrzení je vývoj velkých nevyřešených problémů, otázek položených před stovkami let, které velikánům myšlení nedaly spát až do okamžiku, kdy byla objevena nová cesta, vynořila se nová myšlenka a brána tajemství se rozletěla dokořán. Nejznámějším příkladem nedávné doby je Andrew Wiles a jeho důkaz Velké Fermatovy věty. Někdy kolem roku 1637 napsal Pierre de Fermat na okraj svého výtisku Diofantovy *Aritmetiky*, že rovnice $x^n + y^n = z^n$ nemá celočíselné řešení pro n větší než 2. Důkaz tohoto tvrzení se úspěšně vyhýbal všem snahám o dopadení až do roku 1995, kdy Wiles provedl jeden z nejvýznamnějších matematických převratů dvacátého století. Jeho řešení se opíralo o novou metodu – převedl Fermatovo tvrzení do daleko širšího konceptu „eliptických křivek“ – velmi odlišné oblasti teorie čísel – a pak nasadil všechny možné moderní zbraně s cílem vybojovat konečnou odpověď.

Nejslavnějším nevyřešeným problémem dneška je Riemannova hypotéza, již vyslovil Georg Bernhard Riemann. Je to poměrně technická otázka týkající se komplexní analýzy, jejíž předpokládané řešení by do značné míry osvětlilo problematiku prvočísel, algebraické teorie čísel, diferenciální geometrie, či dokonce dynamiky. V posledních letech se objevily i zajímavé souvislosti s kvantovou fyzikou. Dám hlavu na špalek a předpovím, že kolem roku 2050 bude Riemannova hypotéza již dokázána – ukáže se, že domněnka je pravdivá – a že hlavní

roli v důkazu bude hrát spojitost s fyzikou. Nechám si však zadní dvířka otevřená a připojím domněnku, že konečná cesta k řešení nebude vycházet ze souvislostí dnes známých, nýbrž z těch, které jsou nám zatím skryty.

V roce 1900 předložil David Hilbert, přední matematik své doby, triadvacet zásadních problémů k řešení budoucím generacím. Většina již byla vyřešena, ne však Riemannova hypotéza. V roce 2000 nabídl Clayův matematický institut v Cambridge ve státě Massachusetts odměnu jeden milion dolarů za řešení každé ze sedmi dlouhodobě vzdorujících matematických otázek. Jednou z nich je právě Riemannova hypotéza. Dalšími jsou Poincaréova domněnka, topologická charakterizace trojrozměrné koule; P/NP problém teoretické informatiky, který žádá důkaz, že jisté obtížné výpočty nelze zjednodušit; Hodgeova domněnka a Birchova/Swinnerton-Dyerova domněnka týkající se diferenciální geometrie; existence (či neexistence) řešení Navierových-Stokesových rovnic dynamiky viskózních kapalin a důkaz „hypotézy hmotnostních rozdílů“ související s kvantovou teorií pole. Mám za to, že v roce 2050 budeme o všech sedmi otázkách vědět daleko více než dnes, ovšem s různými výsledky. Hádám, že řešení Poincaréovy domněnky bude stále otevřené, ukáže se, že problém P/NP je formálně nerozhodnutelný a že Navierovy-Stokesovy rovnice jsou řešitelné za určitých exotických okolností, Hodgeova domněnka bude vyvrácena, Birchova/Swinnerton-Dyerova potvrzena, a co se týče hypotézy hmotnostních rozdílů, tak ta bude vyřešena tak či onak, každopádně však o ni fyzikové ztratí zájem.

Existence sedmimilionové odměny nepřivede matematiky k novým postupům. To by nefungovalo v žádném případě, jelikož matematiky vidina peněžité odměny nijak zvlášť neláká, narozdíl od molekulárních biologů. Dosáhne však svého cíle tím, že upozorní okolní svět na důležitost těchto sedmi otázek a matematiky obecně. Rád bych předpověděl, že se tento signál donese až k vládním rozpočtovým výborům, které si konečně uvědomí, že miliarda dolarů na matematiku by posunula lidstvo podstatně dále a k pozitivnějšímu výsledku než stejná částka vydaná na pár součástek k novému částicovému urych-

lovači nebo další masivní manévry v rámci biologické filatelie. Rád bych, ale neudělám to.

Problém P/NP se týká počítačů, ale žádný počítač jej nevyřeší. Tady to chce jen nějaký starý dobrý nápad. Počítače s tímto problémem nepomohou, ale budou hrát jinou roli, stále nepostradatelnější, v předkládání možných domněnek, které se pak budou matematikové snažit potvrdit. A co víc, počítače budou hrát klíčovou roli také v nalézání mnoha důkazů, což je trend, který je již dnes v pohybu. S příslušným programovým vybavením mohou být počítače víc než jen přerostlými kalkulačkami ze šedesátých let minulého století. Již dnes vykonávají logicky náročné operace a „asistují“ lidem při dokazování teorémů. Nejznámějším příkladem je řešení problému čtyř barev, se kterým přišli roku 1976 Kenneth Appel a Wolfgang Haken. Tento teorém, poprvé předložený roku 1852 Francisem Guthriem, říká, že jakoukoliv mapu na ploše lze vybarvit pomocí čtyř barev tak, že žádné dvě sousedící oblasti nebudou mít stejnou barvu. Koncepční částí důkazu byla redukce teorému na rutinní ověření faktu, že zhruba dva tisíce speciálních map, které byly nalezeny bez pomoci počítače, se vyznačovaly určitou vlastností. Počítač pak provedl nezbytné výpočty a potvrdil, že je tomu skutečně tak.

Někteří filozofové prohlašují, že počítačem asistované důkazy jsou kvalitativně odlišné od těch tradičních, protože člověk nemůže sám výsledné výpočty zkontrolovat. My se však můžeme ptát, proč lidé s kontrolováním důkazů vůbec začali – jde o to, že důležitý je proces kontroly samotný, nikoliv entita, která jej vykonává. V minulosti prováděli kontrolu lidé, protože neexistovala jiná alternativa, ale v budoucnosti to již platit nemusí. Hlavním kritériem je důvěryhodnost ověřující entity, a ten, kdo by jí nedůvěřoval, by měl mít v záloze nezávislé entity schopné vykonávat vlastní kontroly. Pokud jsou tyto podmínky splněny, mají rozhodnutí stroje stejnou platnost jako ta lidská. Většina matematiků předpokládá, že v případech nudných, rutinních výpočtů dělá počítač méně výpočetních a logických chyb než člověk. Nutno přiznat, že historie problému čtyř barev se lidskými omyly jen hemží. Záleží jen na

logice počítačového programu a na tom, zda se stroj opravdu chová tak, jak jeho konstruktéři zamýšleli. Obě tyto záležitosti je možné ověřit nezávisle. „Kreativní“ část práce stále obstarávají lidé – přetvářejí problém do podoby, která jej redukuje na obsáhlý, nicméně rutinní seznam výpočtů. Potom se již využití počítačové techniky, filozoficky vzato, nijak neliší od listování v matematických tabulkách.

Tato tendence využívat počítačů ve výzkumu a při dokazování – obdobně jako se v biologii používá rastrovací tunelový mikroskop a zařízení na sekvenování genů – zapustí v matematice roku 2050 hluboké kořeny. Budou existovat systémy „virtuální nereality“, díky nimž budou matematické moci „vstoupit“ do abstraktních konceptuálních struktur, například neeuklidovské geometrie nebo prostorů obrovských prvočísel, a libovolně s nimi manipulovat, téměř bez jakékoliv námahy – podobně jako když dnes počítáme pomocí kalkulaček. Jednotlivé složky VN se již shromažďují a brzy dojde k jejich spojení. Potřeby softwarových inženýrů budou podnětem pro nový rozvoj kombinatoriky – „konečné matematiky“. Současné příležitostné a rozpačité interakce mezi kombinatorikou a geometrií přerostou v intimní poměr, přičemž dohromady je svede vztah mezi strukturou počítačových obvodů a logickou funkcí.

V Newtonově době byly hlavními vnějšími zdroji matematických otázek astronomie a mechanika, tedy fyzikální vědy. V roce 2050 budou s matematikou podobným způsobem svázány i poněkud exotičtější vědy. Jednou z nich bude kvantová fyzika, již dnes vysoce matematická. V poslední době se začínají objevovat také překvapivé souvislosti mezi kvantovými teoriemi pole, geometrií, topologií a algebrou a mnoho dalších bude následovat. Během příštích padesáti let se z nových myšlenkových konstrukcí inspirovaných kvantovou teorií pole, superstrunami a bůhví čím ještě zrodí zcela nové oblasti algebry a topologie. Matematické devatenáctého století zobecnili tradiční „reálná“ čísla na čísla „komplexní“, kde (-1) má druhou odmocninu, což se ukázalo jako mimořádně plodná myšlenka. Záhy všechna odvětví matematiky „zkomplexněla“: na

svět přišla úspěšná komplexní analogie staré matematiky reálných čísel. Kvantování se pak stane „komplexifikací“ dvacátého prvního století; budeme se zabývat kvantovou algebrou, kvantovou topologií, kvantovou teorií čísel.

Daleko významnější a také mnohem radikálnější bude matematika inspirovaná biologickými vědami – biomatematika. S tím, jak triumfální prohlášení týkající se lidského genomu ustupují novému realistickému pohledu na dosažené výsledky, začíná být zřejmé, že pouhé sekvenování DNA nás k plnému pochopení organismů, či dokonce léčení nemocí, příliš daleko neposune. V našich znalostech o vztahu mezi geny a organismy zejí obrovské mezery. A sekvenovaný genom nám neprozrazuje prakticky nic o tom, jak se chovat k pozemským ekosystémům, například korálovým útesům nebo deštým pralesům. Sebevědomé předpovědi, že lidský genom bude obsahovat stovky tisíc genů, se nenaplnily – je jich pouze třicet čtyři tisíc. Cesta vedoucí od genů k proteinům je zase daleko složitější, než se čekalo; pravděpodobně se ani nedá funkčně popsat. Geny jsou součástí dynamického procesu kontroly, který ve vyvíjejícím se organismu proteiny nejen vytváří, ale také je v příslušné fázi jeho života modifikuje a přesouvá na ta správná místa. K pochopení tohoto procesu budeme potřebovat mnohem více než jen pouhý seznam kódů DNA, přičemž většina z toho, co zatím chybí, bude spadat do sféry matematiky. Bude to však nový druh matematiky, takový, který spojuje dynamiku růstu organismu s molekulárním zpracováním informací z DNA. Kód DNA neztratí nic na svém významu, jen se ukáže, že není vším. Nová biomatematika bude zvláštní novou směsicí kombinatoriky, analýzy, geometrie a informatiky. Plus vrchovaté porce biologie, samozřejmě.

Předzvěstí tohoto směru je překotný rozvoj vědy složitých systémů, to jest systémů tvořených velkým počtem relativně jednoduchých komponent – „agentů“ či „entit“ – které spolu jednoduchým způsobem interagují. Zjistili jsme však, že tato jednoduchost je jen zdánlivá, neboť z ní na vyšších úrovních vyplývají složitější vzory, tzv. „emergentní jevy“. Například ze spojení lidských mozkových buněk se rodí vědomí sama sebe.

V roce 2050 budeme již disponovat přesnou matematickou teorií emergentních jevů a dynamiky na vyšších úrovních komplexních systémů. Povede to ke vzniku koncepcí, o nichž se nám dosud ani nezdálo, ale také k novému porozumění omezením matematického modelování ve vědě. Dnes jsou složité systémy zkoumány ve dvou hlavních oblastech – v biologii a ve financích. Například trh s cennými papíry sestává z mnoha agentů, kteří spolu interagují tím, že kupují a prodávají akcie. Tyto interakce jsou pak stavebními kameny finančního světa. Matematika financí a obchodu prodělá revoluci, jakmile zahrne současné „lineární“ modely a začne pracovat s takovými, jejichž matematická struktura věrněji odráží skutečný svět.

Ještě dramatičtější však bude vpád matematiky do takových oblastí, jako jsou společenské vědy, umění či dokonce politika. Nebude se zde ale uplatňovat stejným způsobem, jako se to dnes děje v rámci přírodních věd. Ve fyzice se matematika využívá k formulování kvantitativních zákonů a předpovědi týkající se skutečného světa jsou často výsledkem gigantických propočtů, kdy lidská mysl již není schopna sledovat cesty vedoucí od výchozích zákonů k výsledkům. Například obrovitá spirála hurikánu se modeluje tak, že se zapíše rovnice pohybu miliard drobných oblastí teplého vlhkého vzduchu a poté se provedou rozsáhlé výpočty řešení těchto rovnic. Alternativním přístupem, který je zatím ještě v plenkách, by bylo odvození spirálovitého tvaru hurikánu přímo z obecné struktury rovnic, například jejich symetrií. Nesmírně zdlouhavou manipulaci s čísly by nahradil jakýsi „spirálový kalkulus“. Obecněji vzato můžeme doufat, že se dožijeme počátků kvalitativní, kontextové teorie utváření dynamických obrazců.

Nakonec nám matematika pomůže pochopit uspořádání struktur ve vesmíru, a to prostřednictvím struktur samotných, nikoliv jen pomocí miliardy tančících číslic, z nichž se tyto struktury vynořují jakoby zázrakem.

*

Ian Stewart získal v roce 1995 Faradayovu medaili Královské společnosti za mimořádný přínos popularizaci vědy. Napsal řadu článků o matematice pro známé časopisy jako *Discover*, *New Scientist* nebo *The Sciences*. Po deset let psal sloupek „Matematické rekreace“ pro časopis *Scientific American* a je matematickým poradcem časopisu *New Scientist*. S Jackem Coheinem je také spoluautorem knih *The Collapse of Chaos* (Zhroucení chaosu) a *Figments of Reality* (Výplody skutečnosti) a autorem knih *Does God Play Dice?* (Hraje Bůh v kostky?), *Fearful Symmetry* (Hrozivá symetrie), *From Here to Infinity* (Odsud až do nekonečna), *Nature's Numbers* (Přírodní čísla), *Life's Other Secret* (Druhé tajemství života) a *Flatterland* (vol. Plochozemě na druhou; název odkazuje na slavnou knihu Edwina Abbotta *The Flatland*).