Úvod

# Co je to matematika?

## Nejsou to pouze čísla

Co je to matematika? Položíme-li tuto otázku náhodnému kolemjdoucímu, uslyšíme pravděpodobně následující odpověď: „Matematika – to jsou počty.“ Když ho budeme chtít trochu popíchnout, aby nám vysvětlil, jaké počty má na mysli, možná se nám dostane odpovědi, že jde o *vědu o číslech*. Dál bychom se asi nedostali. Ale takto chápaný popis matematiky přestal platit již před 2 500 lety!

Při této mylné představě není divu, že si málokdo dokáže uvědomit, že matematický výzkum je prosperující, celosvětově rozšířenou činností. Mnohdy si ani nepřipouštíme, jak hluboko matematika proniká do většiny oblastí každodenního života i celé současné společnosti.

Odpověď na otázku *Co je to matematika?* se v průběhu let několikrát změnila. Asi do roku 500 př. n. l. byla matematika skutečně *naukou o číslech*. Tato éra patřila matematikům starobylého Egypta a Babylonu, kteří si většinou vystačili s aritmetikou, již využívali k ryze praktickým účelům. Trochu se podobala dnešním kuchařkám: „Vezmi trojku, přidej k ní pětku a dostaneš osmičku.“

Další období, přibližně 500–300 let př. n. l., patřilo učencům starověkého Řecka, které zajímala především geometrie. Na čísla pohlíželi jako na prostředek, s jehož pomocí se dá především změřit libovolná vzdálenost. Problém nastal, když měli určit například délku úhlopříčky čtverce jednotkové délky, což je iracionální číslo: $\sqrt{2}$. K vyjádření této míry již nevystačili se svými racionálními čísly (zlomky). Protože si jiná čísla nedovedli představit, rozvoj matematiky se v podstatě zastavil. Pro Řeky, kteří kladli důraz na geometrii, byla matematika *naukou o číslech a tvarech*.

Ve skutečnosti to byli právě Řekové, kteří přestali chápat matematiku jako pouhou sbírku návodů k měření, počítání a účtování a začali ji vnímat jako samostatnou oblast studia. Řekové nechtěli mít z matematiky jen prospěch, pohlíželi na ni jako na intelektuální hledání, jež obsahovalo estetické i náboženské prvky. Thales jako první vyslovil myšlenku, že přesně vyjádřené matematické tvrzení lze dokázat určitým metodickým postupem. Tato inovace stála u zrodu pojmu matematické věty, která je dodnes základním kamenem matematiky. Ve starověkém Řecku vyvrcholil tento přístup vydáním Eukleidových *Základů* (řec. Stoicheia, lat. Elementa), které jsou společně s *Biblí* nejvíce vydávanou a studovanou knihou všech dob.

## Matematika v pohybu

Až do poloviny 17. století se matematika nijak výrazně nezměnila. Skutečného pokroku bylo dosaženo teprve tehdy, když Isaac Newton (v Anglii) a G. W. Leibniz (v Německu) zavedli nezávisle na sobě koncepci *diferenciálního a integrálního počtu*, která se zabývá zkoumáním pohybu a změny. Dřívější matematika se omezovala na statické formy počítání, měření a popisování tvarů. Díky postupům, které umožňují postihnout právě pohyb a změnu, jsme schopni studovat pohyb planety a pád tělesa, popsat principy mechaniky, proudění kapalin nebo rozpínání plynů, definovat fyzikální jevy jako elektřinu a magnetismus nebo také odhalit zákonitosti létání, růstu rostlin a živočichů, popsat průběh šíření epidemií nebo kolísání ekonomického zisku. Newton a Leibniz přetvořili matematiku ve studium čísel a tvarů, ale také *pohybu, změny a prostoru*.

Většina prvotních prací, které používaly diferenciální a integrální počet, byla zaměřena na studium fyziky. Skutečně, nejeden velký matematik té doby byl i významným fyzikem. Nicméně přibližně od poloviny 18. století vzrůstal zájem o matematiku jako vědu, nikoli pouze o její aplikace. A to vše v souvislosti s tím, jak se vědci snažili pochopit, z čeho pramení obrovská síla diferenciálního a integrálního počtu. V popředí zájmu opět stanula idea metodického důkazu starověkých Řeků, z níž vychází velká část naší současné čisté matematiky. Koncem 19. století se matematika stala naukou o číslech a tvarech, o pohybu, změně a prostoru, ale také o *matematických postupech*, které jsou při studiu těchto pojmů používány.

K dramatickému rozvoji matematiky došlo ve 20. století. Zatímco v roce 1900 by se veškeré matematické vědění vešlo zhruba do 80 knih, na shrnutí dnešních znalostí bychom jich potřebovali statisíce. Tento neobyčejný rozmach nevycházel pouze z tehdejší klasické matematiky, ale především ze zcela nových odvětví. Na začátku 20. století se matematika skládala přibližně z dvaceti přesně vymezených oblastí: aritmetiky, geometrie, diferenciálního a integrálního počtu atd. Dnes by se dalo takových oblastí nalézt zhruba 60 až 70. Některé obory, například algebra a topologie, se dále rozdělily na nejrůznější podobory. Jiné, jako třeba teorie výpočetní složitosti či teorie dynamických systémů, jsou zcela nové.

## Věda o strukturách

Při tak ohromném rozvoji by se mohlo zprvu zdát, že na otázku *Co je to matematika?* máme jednoduchou, i když trochu povrchní odpověď: „Je to vše, čím se zabývají matematikové." Určitý obor spadal do matematiky ne podle toho, *co* bylo předmětem zkoumání, ale podle toho, *jak* to bylo zkoumáno – tedy podle užité metodologie. V posledních asi třiceti letech byla zformulována definice matematiky, se kterou většina dnešních matematiků souhlasí: *matematika je vědou o strukturách*. Matematik zkoumá abstraktní numerické struktury, struktury tvarů, zákony pohybu, principy chování a rozhodování, podstatu pravděpodobnosti atd. Všechny struktury mohou být skutečné nebo uměle sestavené, zjevné nebo skryté, statické nebo dynamické, kvalitativní nebo kvantitativní, ryze účelové nebo vymyšlené jen tak pro zábavu. Jejich podstata vychází ze světa, který nás obklopuje, z hlubin prostoru a času i z labyrintu lidské mysli. Podle různých typů struktur pak vznikla rozličná odvětví. Například:

- *Aritmetika a numerika* zkoumají struktury čísel a počítání.
- *Geometrie* se zabývá strukturou tvarů.
- *Diferenciální a integrální počet* nám umožňuje studovat pohyb a změnu.
- *Logika* analyzuje principy uvažování.
- *Teorie pravděpodobnosti* se snaží stanovit nějaký řád pro náhodné jevy.
- *Topologie* zachycuje podstatu vzájemné polohy a podobnosti.

Tato kniha se snaží přiblížit čtenáři moderní koncepci matematiky, kterou předkládá v osmi kapitolách, zaměřených po řadě na: numerické struktury; principy rozhodovacích procesů a komunikace; zákonitosti pohybu a změny; struktury tvaru; vlastnosti symetrie a pravidelnosti; topologické struktury, pravděpodobnostní struktury a základní struktury vesmíru.

Ačkoli zmíněný výběr nepostihuje všechny důležité obory, měl by přesto poskytnout docela dobrý všeobecný pohled na současnou problematiku matematiky. Zpracování každého tématu, byť jen čistě popisné, není v žádném směru povrchní.

Jednou z výrazných vlastností moderní matematiky, které si všimne i naprostý laik, je užívání abstraktního zápisu: algebraických výrazů, zdánlivě komplikovaných definic a grafů. Potřeba používat abstraktní symboliku vyplývá z abstraktní podstaty každé struktury, kterou matematik zkoumá.

Různé pohledy na realitu vyžadují různé formy zápisu. Například nejvhodnějším způsobem, jak určit polohu pozemku nebo jak nalézt cestu v cizím městě, je nakreslit si mapu. Slovní popis není tak výstižný. Podobně čáry různého typu v technickém výkresu jsou nejlepší cestou, jak zachytit složitou konstrukci budovy. Nejlepším způsobem, jak vyjádřit melodii, je – samozřejmě kromě skutečné interpretace dané skladby – notový zápis.

Pro různé druhy abstraktních, formálních modelů a abstraktních struktur poskytuje nejvhodnější prostředky k jejich popisu a analýze právě matematika, protože disponuje vhodnými pojmy, procedurami a symbolikou. Například obecné vlastnosti sčítání a násobení nejlépe vyjádří právě algebraický zápis. Komutativní zákon pro sčítání by mohl být v přirozeném jazyce zapsán větou: *Při sčítání dvou čísel nezáleží na jejich pořadí*. Tento zákon obvykle vhodněji vyjádříme symbolicky:

$$m + n = n + m$$

Složitost a úroveň abstrakce většiny matematických struktur neobyčejně ztěžuje použití jiného než symbolického zápisu. A tak se s vývojem matematiky ve stále větší míře používá i abstraktní zápis.

## Symboly pokroku

Řecký matematik Diofantos žil v Alexandrii kolem roku 250 př. n. l. a byl patrně prvním, kdo systematicky používal algebraické symboly. Diofantovo pojednání *Aritmetika* (obr. 0.1), z jehož původních třinácti svazků se zachovalo pouhých šest, je považováno za první učebnici algebry. Diofantos používal v rovnici speciální znaky pro označení mocnin a neznámých a rovněž symbolicky vyjadřoval odčítání a rovnost.


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
*CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.*
*& obseruationibus D. P. de* FERMAT *Senatoris Tolosani.*
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.

TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

*Obr. 0.1* Titulní stránka latinského překladu Diofantovy *Aritmetiky* ze 17. století.

Současné matematické knihy se zdají být symboly přímo zahlceny, ale matematický znak ještě není sám o sobě matematikou, tak jako notový part ještě není hudbou (viz obr. 0.2). Notový list hudbu jen zapisuje; ovšem samotnou melodii uslyšíme, až když ji podle not zazpíváme nebo přehrajeme na hudebním nástroji. Teprve během představení hudba ožije a my ji můžeme prožít. Hudba nevzniká okamžikem notového zápisu, ale teprve ve chvíli, kdy pronikne do naší mysli. Totéž platí pro matematiku. Symboly na stránce jsou pouhými zástupnými znaky. Pokud se však dostanou do rukou vnímavému čtenáři, jako by obživly. Matematika pak žije a dýchá v jeho mysli jako nějaká abstraktní symfonie.

Vzhledem k výrazné podobnosti mezi matematikou a hudbou (obě mají svůj vlastní vysoce abstraktní zápis a řídí se svými vlastními strukturálními pravidly) asi málokoho překvapí, že mnozí matematici mají současně i hudební nadání.

Po takřka celou dobu 2 500 let trvání západní civilizace, jejíž počátek spadá do období starověkého Řecka, se na matematiku a na hudbu pohlíželo jako na dvě strany téže mince. Lidé věřili, že obě poskytují


*Obr. 0.2* Hudba podobně jako matematika využívá k vyjádření abstraktní struktury vlastní abstraktní zápis.

náhled na uspořádání vesmíru. Teprve s rozvojem vědeckých metod v 17. století se cesty matematiky a hudby rozdělily.

Nicméně navzdory všemu, co mají už po staletí společné, až donedávna mezi nimi byl jeden velmi zřetelný rozdíl. Jen hudebně nadané osobě se při čtení notového zápisu rozezvučí v hlavě melodie. Pokud však tentýž part zahraje kvalifikovaný hudebník, může jej ocenit i laik. Poslech a prožívání hudby většinou nevyžaduje žádný hudební trénink.

S matematikou je to poněkud obtížnější. Řeči jejích symbolů se musíme naučit. Matematické struktury a modely se sice stejně jako hudba zrcadlí v lidské mysli, ale u člověka se nevyvinula žádná obdoba „matematických uší“. Matematiku můžeme vnímat jen „očima své mysli“. V hudbě by nastala podobná situace, kdybychom ztratili sluch. Sluchově postižená žena nebo muž by snad mohli vnímat a prožívat hudbu pouze při čtení notového zápisu.

V dnešní době prudkého rozvoje počítačů a multimédií má matematika šanci se do jisté míry přiblížit i neodborné veřejnosti. V rukou zkušeného uživatele se výpočetní technika stává nástrojem pro řešení složitých matematických úloh, jejichž výsledky se pak mnohdy po jediném kliknutí myší zobrazí na obrazovce. Ačkoli je laik schopen proniknout tímto způsobem jen do velmi malé části matematiky, přesto může alespoň zčásti zhlédnout něco z krásy a harmonie, kterou odborník při své práci vidí a prožívá.