5. kapitola

Matematika krásy

Výhoda práce s grupami

Původním úkolem geometrie byl popis různých objektů a vztahů, pozorovaných v okolním světě. Zrakem vnímáme nejen struktury tvaru objektů, všímáme si i jiných jejich struktur. Jako typický příklad si uveďme symetrii. Symetrie sněhové vločky či květiny viditelně souvisí s geometrickou pravidelností těchto objektů. Zkoumání struktury symetrie zachycuje hluboký a abstraktní pohled na tvar. Symetrické objekty na nás působí vyváženě a harmonicky, proto nazýváme jejich studium matematikou krásy.

Symetrii zkoumáme prostřednictvím transformací objektů. *Transformace* je speciálním typem funkce. Jako příklad mohu uvést otočení, posunutí, osovou souměrnost, zvětšování nebo zmenšování objektu. *Symetrií* nějakého útvaru nazýváme takovou transformaci, která ponechá objekt nezměněný. Transformovaný objekt vypadá po proměně stejně jako před ní, pouze jeho jednotlivé body mohou být transformací přemístěny.

Očividným příkladem symetrického obrazce je kruh. Transformacemi, které kruh nezmění, jsou otočení kolem jeho středu (o jakkoli velký úhel a v obou směrech), osová souměrnost podle libovolné osy procházející středem a jakákoli konečná kombinace otočení a osové souměrnosti. Je zřejmé, že bod vyznačený na obvodu kruhu může po transformaci zaujmout jinou pozici. Kruh, který je nějakým způsobem označený, již nemusí být symetrický ani vzhledem k otáčení, ani vzhledem k osové souměrnosti. Otočíme-li ciferník hodin o 90° proti směru hodinových ručiček, pak se číslo 12 dostane na původní místo čísla 9. Hodiny tedy vypadají jinak. Otočíme-li ciferníkem kolem svislé osy otáčení, která prochází čísly 12 a 6, pak si čísla 9 a 3 vymění místa. Ciferník je opět jiný. Označené kruhy se tedy symetrií příliš nevyznačují. Avšak samotný kruh – bez jakýchkoli značek – je symetrický.

Je-li dán libovolný útvar, pak *grupa symetrií* tohoto útvaru je množinou všech invariantních transformací vzhledem k danému útvaru. Transformace náležející do této grupy obrazec vůbec nezmění – tvar, poloha a orientace obrazce je po transformaci stejná jako před ní.

Grupa symetrií kruhu se skládá ze všech možných kombinací otočení kolem středu (o jakýkoli úhel a v libovolném směru) a osové souměrnosti (vzhledem k libovolné ose procházející středem). Invariance kruhu vzhledem k otočení kolem středu se nazývá *rotační symetrie*. Invariance vzhledem k souměrnosti podle osy procházející středem se nazývá *zrcadlení*. Oba tyto druhy symetrie jsou rozpoznatelné zrakem.

Jestliže S a T jsou libovolné dvě transformace z grupy symetrií kruhu, pak složená transformace, která vznikne nejprve provedením transformace S a potom T, je také členem grupy symetrií kruhu, tj. ponechává kruh nezměněný. Tato složená transformace se obvykle značí $T \circ S$. (V některých případech se používá opačné pořadí symbolů, které souvisí s abstraktním vztahem mezi grupami a funkcemi. V této knize se jím však nebudeme zabývat.)

Složení dvou transformací ve třetí připomíná operace sčítání a násobení, kde kombinací libovolných dvou čísel dostáváme třetí číslo. Matematika v tomto okamžiku přirozeně zajímá, jakými vlastnostmi se vyznačuje transformace složená ze dvou transformací z grupy symetrií kruhu.

První vlastnost: skládání transformací je asociativní. Jestliže S, T, W jsou transformace z grupy symetrií, pak platí

$$(S \circ T) \circ W = S \circ (T \circ W).$$

V tomto ohledu se skládání transformací podobá sčítání a násobení v oboru přirozených čísel.

Druhá vlastnost: operace skládání má neutrální prvek, který nemění žádnou transformaci. Jedná se o nulové otočení, tj. otočení o úhel 0°. Nulové otočení, označme jej I, lze složit s libovolnou další transformací T, přičemž dostáváme

$$T \circ I = I \circ T = T.$$

Otočení I zde zřejmě hraje stejnou roli jako číslo 0 při sčítání a číslo 1 při násobení.

Třetí vlastnost: ke každé transformaci existuje inverzní transformace. Jestliže je T libovolná transformace, pak existuje transformace S taková, že

$$T \circ S = S \circ T = I.$$

Inverzní transformací k otočení je otočení o stejný úhel, ale v opačném směru. Inverzí k osové souměrnosti je tatáž osová souměrnost. Abychom získali inverzi k libovolné konečné kombinaci otočení a osových souměrností, musíme provést kombinaci zpětných otočení a zpětných osových souměrností, které ruší efekt původních transformací. Začneme u poslední operace, kterou anulujeme, pak anulujeme předposlední, dále předcházející atd.

Existence inverzí je vlastnost sdílená s operací sčítání pro celá čísla: pro každé celé číslo m existuje celé číslo n takové, že

$$m + n = n + m = 0,$$

kde 0 je nulový prvek pro sčítání. Pak platí, že $n = -m$. To již samozřejmě neplatí pro násobení celých čísel: pro každé celé číslo m neexistuje celé číslo n tak, aby

$$m \times n = n \times m = 1,$$

kde 1 je jednotkový prvek pro násobení. Ve skutečnosti pouze pro čísla $m = 1$ a $m = -1$ existuje další celé číslo n vyhovující výše uvedené rovnici.

Závěrem můžeme říci, že libovolné dvě symetrické transformace kruhu lze složit ve výslednou třetí transformaci, která je také symetrická a navíc má tři „aritmetické" vlastnosti: asociativitu, existenci jednotkového prvku a existenci inverzního prvku.

Podobně můžeme analyzovat i jiné symetrické obrazce. Výše uvedené vlastnosti symetrických transformací, které jsme si přiblížili na příkladě kruhu, se vyskytují v matematice tak často, že vedly k vytvoření pojmu *grupa*. Připomeňme si, že jsme tento termín již použili pro „grupu symetrií". Kdykoli matematik studuje nějakou množinu objektů (řekněme G) a operaci (označíme si ji symbolem $\star$), která přiřazuje každým dvěma prvkům $x, y \in G$ další prvek $x \star y \in G$, pak množina G se nazývá grupa, jestliže jsou splněny následující tři podmínky:

G1. Pro každé $x, y, z \in G$ platí, že $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$.
G2. Existuje $e \in G$ takové, že pro každé $x \in G$ platí $x \star e = e \star x = x$.
G3. Pro každé $x \in G$ existuje $y \in G$ takové, že platí $x \star y = y \star x = e$, kde e je prvek z podmínky G2.

Množina všech symetrických transformací kruhu tedy tvoří grupu. Nemělo by nám dělat potíže přesvědčit se, že jestliže je G množinou všech symetrických transformací libovolného obrazce a operace $\star$ je složením dvou symetrických transformací, pak výsledkem je grupa.

Z dřívějších poznámek by mělo být také jasné, že je-li G množinou celých čísel a operace $\star$ sčítáním, pak výsledná struktura je opět grupou. To již neplatí pro celá čísla s operací násobení. Je-li však G množina racionálních čísel (s výjimkou nuly) a operace $\star$ je násobením, pak opět dostáváme grupu.

Odlišný příklad grupy poskytuje konečná aritmetika, o níž jsem se zmínil v 1. kapitole. Celá čísla $0, 1, \ldots, n-1$ s operací sčítání při modulu n jsou grupou pro libovolné přirozené n. Je-li n prvočíslo, pak přirozená čísla $1, 2, \ldots, n-1$ tvoří grupu vzhledem k operaci násobení při modulu n.

Tyto tři příklady jsou pouhým zlomkem problematiky grup. V moderní matematice – v čisté i aplikované – se grupy nalézají téměř všude. Pojem grupa byl poprvé formulován na počátku 19. století, tehdy se však neobjevil ve spojitosti s aritmetickými ani symetrickými transformacemi, ale jako důsledek zkoumání polynomiálních algebraických rovnic. Klíčové myšlenky, které si později v této kapitole přiblížíme, vyslovil Evariste Galois.

Grupa symetrií daného obrazce je matematická struktura, která v jistém smyslu zachycuje jeho vizuální symetrii. V případě kruhu je tato grupa symetrií nekonečná, protože existuje nekonečně mnoho úhlů otočení a nekonečně mnoho poloměrů, podle nichž lze kruh zobrazit v osové symetrii. Bohatost grupy symetrických transformací kruhu je zřejmá z vysokého stupně vizuální symetrie – „dokonalé symetrie“, které si povšimneme okamžitě při pohledu na kruh.

Na druhém konci spektra se nalézá naprosto nesymetrický obrazec, jehož grupa symetrií se skládá pouze z jediné transformace, která je identická. Snadno zjistíme, že tento speciální případ splňuje podmínky grupy, stejně jako číslo 0 tvoří samo o sobě grupu vzhledem k operaci sčítání.

Než se podíváme na další příklad grup, je užitečné se na chvíli zastavit u podmínek G1, G2 a G3, které určují, zda daná množina spolu s operací tvoří grupu, či ne.

První podmínku G1 – podmínku asociativity – důvěrně známe z případu aritmetických operací sčítání a násobení (ačkoli neplatí pro odčítání a dělení).

Podmínka G2 udává existenci jednotkového prvku. Tento prvek musí být jednoznačně určený, protože kdyby existovaly dva prvky e, i s vlastností G2, pak aplikováním této vlastnosti dvakrát po sobě dostáváme, že

$$e = e \star i = i,$$

což znamená, že e a i jsou jeden a tentýž prvek.

Z posledního poznatku plyne existence pouze jediného prvku e vyhovujícího podmínce G3. Navíc platí, že k libovolnému prvku $x \in G$ existuje pouze jeden prvek $y \in G$ takový, že jsou splněny požadavky podmínky G3. To lze také docela snadno dokázat. Předpokládejme, že oba prvky y a z odpovídají prvku x z podmínky G3. Tedy předpokládejme, že platí:

(1) $x \star y = y \star x = e$
(2) $x \star z = z \star x = e$.

Dále platí:

$y = y \star e =$	(podle vlastnosti prvku e)
$= y \star (x \star z) =$	(podle 2. rovnice)
$= (y \star x) \star z =$	(podle G1)
$= e \star z =$	(podle 1. rovnice)
$= z$	(podle vlastnosti prvku e)

Což znamená, že y a z jsou jeden a týž prvek. Protože v podmínce G3 existuje k danému prvku x právě jeden prvek y, je vhodné tomuto prvku dát jméno: nazývá se inverzní prvek k x a často jej označujeme symbolem x^{-1}. Tím jsme právě dokázali větu z matematického oboru známého jako *teorie grup*, která říká, že v libovolné grupě existuje ke každému prvku jednoznačně určený inverzní prvek. Tuto jednoznačnost jsme právě logicky odvodili z axiomů pro grupy (ze tří původních podmínek G1, G2, G3).

Ačkoli je toto tvrzení po stránce formulace i důkazu velmi jednoduché, ukazuje nám ohromnou sílu abstrakce. V matematice najdeme mnoho příkladů grup. Pojmem grupa zachycujeme vysoce abstraktní princip, který spojuje mnohé z těchto příkladů. Protože jsme *pouhým použitím axiomů* pro grupy dokázali, že inverzní prvky jsou jednoznačně dány, víme, že tento fakt bude platit pro libovolnou grupu. Žádné další zkoumání není nutné. Jestliže se zítra setkáme s nějakým novým druhem matematické struktury, o které dále zjistíme, že je grupou, budeme okamžitě vědět, že ke každému prvku této grupy existuje jediný inverzní prvek. Zároveň budeme vědět, že objevená struktura má každou vlastnost, kterou lze v abstraktním tvaru odvodit ze samotných základních axiomů pro grupu.

Čím více nalezneme příkladů pro abstraktní struktury, jakými jsou například grupy, tím více se nám nabízí aplikací, které vycházejí z odvozených tvrzení. Cena, kterou platíme za rozšířené obzory, spočívá v nutnosti práce s vysoce abstraktními strukturami abstraktních objektů. V teorii grup většinou nezáleží na charakteru prvků grupy či grupové operace. Prvky mohou být čísla, transformace nebo další druhy objektů. Operací může být sčítání, násobení, kombinace transformací – v podstatě cokoli. Podstatné je pouze to, aby prvky spolu s operací splňovaly axiomy pro grupu (axiomy G1, G2, G3).

Závěrečná poznámka k axiomům grup se bude týkat jejich vlastní formulace. V podmínkách G2 a G3 jsou kombinace napsány dvěma způsoby. Čtenář obeznámený s komutativními aritmetickými zákony si zřejmě položí otázku, proč byly axiomy napsány tímto způsobem. Proč je matematici jednoduše nepíší jedním směrem, řekněme

$$x \star e = x$$

za podmínky G2 a

$$x \star y = e$$

za podmínky G3? Proč nepřidají další axiom – komutativní zákon:

G4. Pro každé $x, y \in G$ platí, že $x \star y = y \star x$

Odpověď zní: matematici takto grupu nedefinují, protože přidaný axiom G4 by vedl k vyloučení mnohých příkladů, které by chtěli zkoumat.

Ačkoli mnoho grup symetrií nesplňuje komutativní podmínku G4, velký počet dalších typů grup jí vyhovuje. Díky tomu dostaly grupy vyhovující podmínce G4 speciální název. Říká se jim *Abelovy grupy* podle norského matematika Nielse Henrika Abela. Studium Abelových grup tvoří podstatnou část teorie grup.

Pro další příklad grupy symetrií se podívejme na rovnostranný trojúhelník na obrázku 5.1. Tento trojúhelník má přesně šest symetrických transformací: identickou transformaci I, otočení proti směru hodinových ručiček v o 120° a w o 240° a osovou souměrnost x, y, z podle přímek X, Y, Z v uvedeném pořadí. (Přímky X, Y, Z zůstávají na stejném místě.) Není nutné uvádět otočení *ve* směru hodinových ručiček, protože otočení o 120° ve směru hodinových ručiček je ekvivalentní otočení o 240° *proti* směru hodinových ručiček. Podobně otočení o 240° ve směru hodinových ručiček má stejný efekt jako otočení o 120° proti směru hodinových ručiček.