

SYMETRIE

Inkoustová skvrna na kousku papíru není na pohled ničím zvláštní, když ale papír ještě před uschnutím inkoustu přeložíme, spatříme něco mnohem zajímavějšího, něco takového, co vypadá například jako obrázek 1. Na interpretaci podobných skvrn je v podstatě založen slavný test,¹ vyvinutý ve 20. letech minulého století švýcarským psychiatrem Hermannem Rorschachem. Záměrem testu je odhalit skryté obavy, divoké přeludy a hlubší myšlenky toho, kdo tyto nejednoznačné tvary interpretuje. O skutečné hodnotě Rorschachova testu jako „rentgenových paprsků mysli“ se v kruzích psychologů úporně debatuje. „Či myslí, testovaného nebo testujícího?“ nadhodil jednou psycholog Scott Lilienfeld z Emoryho univerzity. Nedá se nicméně popřít, že nás objekty jako obrázek 1 něčím přitahují a vzrušují.

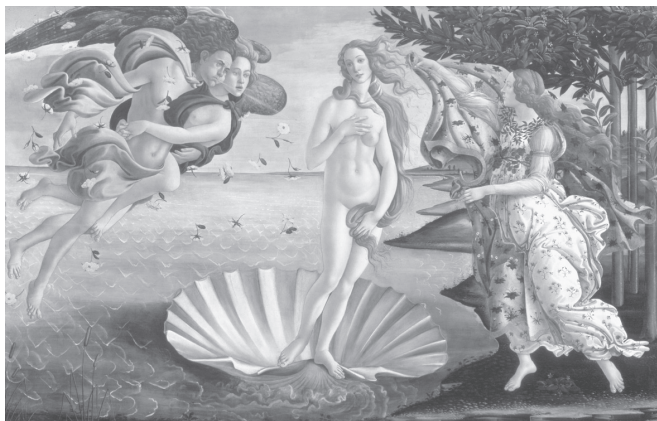
Není to třeba proto, že lidské tělo, většina živočichů a tolik lidských výtvorů charakterizuje podobná dvoustranná souměrnost? Proč ale vlastně všichni tito živočichové a výtvoři lidské obrazotvornosti vykazují právě takovou symetrii?

Většina lidí vnímá harmonické kompozice, například Botticelliho *Zrození Venúše*² (obrázek 2), jako symetrické. Historik umění Ernst H. Gombrich si dokonce všiml, že „to, jak si Botticelli dovolil nakládat s přírodou, aby dosáhl ladných tvarů, ještě zesiluje krásu a harmonii kompozice“. Matematici by ovšem řekli, že uspořádání barev a forem na tomto obraze není v matematickém smyslu slova symetrické ani trochu. Většina ostatních lidí naopak zase nevnímá jako symetrický vzor na obrázku 3, ačkoli podle formální matematické definice ve skutečnosti symetrický je. Co je to tedy vlastně symetrie? Jakou roli hraje ve vnímání, pokud vůbec nějakou? Jak souvisí s naší es-



Obr. 1

SYMETRIE



Obr. 2

tetickou vnímavostí? Proč se symetrie v říši vědy stala tak ústředním aspektem našich představ o vesmíru kolem nás a základních teorií pokoušejících se o jeho vysvětlování? Jestliže se symetrie týká tak širokého spektra oborů, jaký „jazyk“ a jakou „gramatiku“ máme k popisu a k charakteristice symetrií a jejich atributů a jak tento univerzální jazyk vlastně vznikl? A když to trochu odlehčíme, může symetrie odpovědět i na tak zásadně důležitou otázku, jakou klade název jedné písničky rockového zpěváka Roda Stewarta – *Do Ya Think I'm Sexy?* – „Myslíš, že jsem sexy?“



Obr. 3

Všechny tyto a řadu dalších otázek se zde pokusím alespoň zčásti zodpovědět. Zároveň bych byl rád, aby kniha jako celek ukázala humanistický charakter matematiky a postihla i její lidskou stránku. Jak uvidíme, symetrie je ústředním nástrojem, s jehož pomocí můžeme překlenovat rozdíly mezi vědou a uměním i mezi psychologii a matematikou. Prostupuje objekty a koncepty sahající od perských koberečů po molekuly živé hmoty, od Sixtinské kaple po usilovně hledanou „teorii všeho“. Matematickým jazykem, jenž popisuje podstatu symetrií a zkoumá jejich vlastnosti, je sice teorie grup, ta ale vůbec nevznikla studiem symetrií. Tahle podivuhodně jednotící idea moderního myšlení naopak vzešla z nejméně pravděpodobného zdroje – neřešitelné rovnice. A právě dramatická a zamotaná historie rovnice, jež vzdorovala řešení, je ústřední částí tohoto příběhu lidského ducha. Naše vyprávění přitom vrhne světlo na osamě-

lost génia a houževnatost lidského intelektu tváří v tvář zdánlivě nepřekonatelným překážkám. Obrovské úsilí jsem věnoval také snaze vyřešit dvě století starou záhadu smrti protagonisty našeho příběhu - zázračného matematika Évarista Galoise. Jsem přesvědčen, že jsem se v tomto ohledu pravdě přiblížil více, než kdy bylo možné.

Duchaplný dramatik George Bernard Shaw jednou prohlásil: „Rozumný člověk se přizpůsobuje světu, nerozumný se usilovně snaží přizpůsobit svět sobě. Proto je všechen pokrok závislý na člověku nerozumném.“ V naší knize se setkáme s celou řadou nerozumných mužů i žen. Tvůrčí proces samou svou podstatou vyhledává neprobádané duchovní a emocionální končiny. Krátké výlety do sfér matematické abstrakce nám umožní nahlédnout do samé povahy tvorivosti. Celé vyprávění začneme krátkým průzkumem divotvorné říše symetrie.

IMUNNÍ VŮČI ZMĚNÁM

Slovo *symetrie* má starověké kořeny³ v řeckých slovech *sym* a *metria*, která znamenají „stejně měřítko“. Jestliže Řekové označili nějaký umělecký objekt nebo architektonický návrh za symetrický, znamenalo to, že obsahoval určitou malou část takovou, že v rozměrech všech ostatních částí byl tento díl obsažen nějakým přesně celočíselným násobkem (neboli části byly „souměřitelné“). Tato raná definice odpovídá v našem moderním pojetí spíše úměře než symetrii. Velcí filozofové Platón (428/427–348/347 př. n. l.) a Aristoteles (384–322 př. n. l.) nicméně velmi rychle ztotožnili symetrii s krásou. Aristoteles to vyjádřil takto: „Hlavními formami krásy jsou náležitě uspořádání [v řečtině *taxis*], proporce [*symmetria*] a ohraničenost [*horismenon*]. Tyto formy se projevují zejména v matematice.“ Po vzoru Řeků pak ztotožňoval symetrii s „náležitou proporcí“ i vlivný starořímský architekt Vitruvius⁴ (asi 70–25 př. n. l.), jehož koncepce přetrvala celou renesancí. Ve svém spise *Deset knih o architektuře*, který byl v Evropě po řadu staletí doslova biblí architektury, Vitruvius píše:

Kompozice svatyní spočívá v symetrii (poměrovém souladu), jejíž pravidla musí stavitelé s největší bedlivostí dodržovat. Tento soulad se podává z proporcionalnosti ... Proporcionalnost je rozměrová rovnováha příslušné části členů v celém stavebním díle a díle jakožto celku ve vztahu k části přijaté za výchozí (modulus), z níž vyplývá idea symetrie. Bez symetrie a bez proporcionalnosti nemůže totiž žádná svatyně dospět k správnému kompozičnímu pojetí. [Překlad Alois Otoupalík]

SYMETRIE

Moderní význam slova symetrie⁵ (tak, jak se s ním pracuje od konce 18. století) ve výlučně matematickém smyslu je vskutku „imunita vůči jakékoli možné změně“. Čili, jak to jednou napsal matematik Hermann Weyl (1885–1955), „určitá věc je symetrická tehdy, pokud v případě, že s ní něco děláme, vypadá na konci stejně jako předtím“. Podívejme se například na verše

*Zvláštní, jak asymetrická
je „symetrie“.
„Symetrie“ je asymetrická.
Jak zvláštní.⁶*

Sloka zůstává stejná, i když ji budeme číst slovo od slova opačně, tedy od konce k začátku; je tedy symetrická vůči čtení pozpátku. Představíme-li si slova jako korálky na šňůrce, mohli bychom pohlížet na čtení pozpátku jako na svého druhu zrcadlový odraz sloky (slovní, nikoli písmenový). Když se sloka zrcadlově zobrazí ve výše uvedeném smyslu, nezmění se – je vůči takovému zrcadlovému odrazu symetrická. A podíváme-li se, jak to bude vypadat při čtení nahlas, pak čtení pozpátku odpovídá návratu zpět v čase na způsob zpětného přetáčení videokazety (opět ne doslova, protože v našem případě za sebou nejdou jednotlivé zvuky, ale celá slova). Slovní celky s takovou vlastností známe pod označením *palindromy*.⁷

Objev palindromů se všeobecně připisuje řeckému básníku Sotadovi, který žil ve třetím století před našim letopočtem v Egyptě, ovládaném tehdy Řeky. Palindromy měli v mimořádné oblibě takoví kouzelníci se slovy jako Angličan J. A. Lindon nebo známý autor řady publikací z oboru matematických hlavolamů a hádanek Martin Gardner. Jeden z Lindonových slovních palindromů zní: „Dívce na Bikini líbí se chlapci jen, jednomu jen chlapci se líbí bikiny na dívce.“ Jiné palindromy jsou symetrické ve vztahu ke zpětnému čtení jednotlivých písmen – uveďme například líčení problémů bývalého premiéra ve větě „Zeman nemá kámen na mez“ nebo možný titulek novinového článku po vítězství české lyžařky „Ale jak ta Katka jela“.⁸

Překvapivé je, že palindromy se neobjevují jen ve vtipných slovních hříčkách, ale i ve struktuře mužského chromozomu Y. Celá genomová sekvence chromozomu Y byla po imponantním úsilí přečtena teprve roku 2003.⁹ Výsledek ukázal, že schopnost sebezachování tohoto pohlavního chromozomu se značně podceňovala. Jiné lidské chromozomy jsou párové a proti škodlivým mutacím bojují vzájemnými výměnami genů. Jelikož však chromozom Y od-

povídajícího partnera do páru při spojení pohlavních buněk nemá, genetici se donedávna domnívali, že jeho genetická informace se vytratí během asi pěti milionů let. K jejich údivu však výzkumníci týmu, který prováděl sekvenování, objevili, že tento chromozom bojuje proti svému zániku pomocí palindromů. Kolem šesti milionů z celkem 50 milionů písmen popisujících DNA tvoří palindromní sekvence, tedy takové, které se na obou vláknech dvojité šroubovice čtou stejně dopředu i pozpátku. Tyto zkopírované sekvence tak jsou nejen zálohou pro případ vzniku špatných mutací, ale také umožňují chromozomu do určité míry sebereplikaci – úseky si mohou vyměnit pozice a geny se přesunou. „Chromozom Y je zrcadlová síň,“ komentoval to vedoucí výzkumného týmu David Page z Massachusettského technologického institutu.

Nejznámějším příkladem zrcadlové symetrie je samozřejmě dvoustranná souměrnost čili bilaterální symetrie, charakteristická pro živočišnou říši.¹⁰ U motýlů i u velryb, u ptáků stejně jako u lidí nacházíme na levé polovině něco, co je téměř shodné s tím, co je napravo. Budeme teď na chvíli ignorovat malé, třebaže svůdné vnější odchylky, které opravdu existují, i to, že bilaterální symetrii nevykazuje anatomie vnitřních orgánů ani funkce mozku.

Mnozí lidé pod slovem *symetrie* chápou právě dvoustrannou souměrnost. Dokonce i ve slovníku *Webster's Third New International Dictionary* jedna z definic symetrie zní: „Shoda velikosti, tvaru a vzájemné polohy částí, které se nacházejí na opačných stranách dělicí čáry nebo středové roviny.“ Přesný matematický popis zrcadlové symetrie vychází ze stejného konceptu. Vezměme si kresbu bilaterálně symetrického motýla a oddělme obě poloviny jeho těla čarou shora dolů. Jestliže kresbu podle této osy přehneme, dokonale se překryje. Motýl zůstává při zrcadlení kolem středové osy nezměněn, je vůči němu takzvaně invariantní.

Dvoustranná souměrnost je mezi živočichy tak rozšířená, že může těžko jít o náhodu. Budeme-li na živé tvory pohlížet jako na ohromné soubory bezpočtu bilionů molekul, bude jistě existovat nezměrně více způsobů, jak z těchto stavebních kamenů sestavit asymetrické než symetrické konfigurace. Kousky rozbité vázy mohou ležet na hromadě ve všelijak pomíchaných sestavách, ale jen v jediném uspořádání všechny kusy zapadnou do sebe a vznikne z nich původní (obvykle bilaterálně symetrická) váza. A přece fosilní nálezy z Ediakarské pahorkatiny v jižní Austrálii ukazují, že bilaterální symetrii disponovaly již organismy s měkkými těly (*Spriggina*), pocházející z pozdně prekambriického období zvaného „vend“, tedy z doby před 650–543 miliony let.

SYMETRIE

Jelikož život na Zemi byl formován neustálým působením evoluce a přirozeného výběru, musely tyto procesy nějakým způsobem preferovat bilaterální nebo zrcadlovou symetrii. Mezi všemi možnými podobami, jež na sebe živočichové mohli brát, totiž získala navrch právě dvoustranná souměrnost. Nevyhnutelně tak docházíme k závěru, že taková symetrie musela asi být výsledkem biologického vývoje. Dokážeme pochopit, jakou měla právě taková tendence příčinu? Můžeme se přinejmenším pokusit nalézt některé její základní stavební předpoklady v zákonech mechaniky. Jedním z klíčů k problému je to, že směry na povrchu Země nejsou vzájemně rovnocenné. Existuje zřetelná odlišnost mezi směry nahoru a dolů (u živočichů v biologické hantýrce *dorzální* a *ventrální*), která je dána zemskou gravitací. Většinou je to tak, že co jde nahoru, musí posléze sejít dolů, nikoli však naopak. Další rozdíl, tentokrát mezi směry dopředu a dozadu, je důsledkem živočichova pohybu.

Každý relativně rychle se pohybující tvor, ať v moři, na zemi či ve vzduchu, získá zřetelnou výhodu, jestliže jeho přední část bude jiná než zadní. To, že všechny smyslové orgány, hlavní čidla světla, zvuku, pachu a chuti, má živočich vpředu, mu zcela jistě pomáhá v rozhodování, kam namířit a jak se tam co nejlépe dostat. „Radar“ v přední části těla mu také zajišťuje včasnou výstrahu před možným nebezpečím. Mít nebo nemít ústní otvor vpředu může znamenat buď dorazit k obědu jako první, nebo zůstat o hladu. Reálná mechanika pohybu (zejména na zemi nebo ve vzduchu) pod vlivem gravitační síly Země zároveň vytvořila zřetelný rozdíl mezi spodkem a vrškem. Jakmile se život vynořil z moře a přešel na suchou zem, musel se vyvinout určitý druh mechanických nástrojů - nohou - schopných přenášet živočicha z místa na místo. V horní polovině těla žádné takové přívěsky nebyly potřeba a odlišnost mezi oběma částmi se ještě zvýraznila. Aerodynamika létání (pořád pod vlivem gravitace) ve spojení s požadavky na vybavení k přistávání a s nějakými nástroji pro pohyb na povrchu tak vytvořila rozdíl mezi spodní a horní částí u ptáků.

Teď však docházíme k důležitému poznatku: *v moři, na zemi ani ve vzduchu neexistuje nic systémově významného, co by rozlišovalo mezi směry vlevo a vpravo.* Hledí-li jestřáb vpravo, vidí stále zhruba tutéž krajinu, jaká je i nalevo od něj. Neplatí to o směrech nahoru a dolů - nahoře je, kam jestřáb vzlétne, jak nejvýše může, zatímco dole je tam, kde přistává a staví si hnízdo. Když pomíne politickou rétoriku, na Zemi opravdu neexistuje velký rozdíl mezi směry vlevo a vpravo, protože zde nepůsobí žádné výraznější horizontální síly. Jistě, otáčení Země kolem osy a zemské magnetické pole (to, že Země se chová vůči svému okolí jako magnet) určitou asymetrii zavádějí. Tyto účinky však nejsou

na viditelné úrovni ani zdaleka tak významné jako důsledky gravitační síly a rychlého pohybu živých tvorů.

Dosud jsme vysvětlovali, proč má bilaterální symetrie živých organismů smysl z hlediska mechaniky. Taková souměrnost je rovněž hospodárná, protože znamená dva orgány za cenu jednoho. Složitější je ale popsat, jak tato symetrie, popřípadě její absence, vznikla působením evoluce (genů), nebo dokonce pod vlivem základních zákonů fyziky; k této otázce se zčásti vrátíme v kapitolách 7 a 8. Poznamenejme zde jen, že řadě mnohobuněčných organismů v raně embryonální fázi ještě bilaterální symetrie chybí. Hnací silou úprav „původního plánu“ v době, kdy embryo roste, může být skutečně schopnost pohybu.

Zdaleka ne celá živá příroda žije v „rychlém pruhu“. Životní formy svázané s jedním místem a neschopné se přesouvat vlastní silou, jako jsou třeba rostliny nebo sesilní, tj. pevně usazení živočichové, mívají velmi rozdílnou horní a spodní část těla, avšak nevykazují žádné rozlišitelné rozdíly mezi přední a zadní ani levou a pravou polovinou těla. Svou symetrií se podobají kuželu – v tom, že vytvářejí symetrické odrazy jakoby v zrcadle, které prochází jejich středovou vertikální osou. Podobnou symetrií mají i někteří velmi pomalu se pohybující živočichové, kupříkladu medúzy.

Je jasné, že jakmile se jednou bilaterální symetrie u živých organismů vyvinula, mluvilo vše pro to, aby se nadále zachovala. Jakákoli ztráta ucha nebo oka by živočicha vystavila zvýšenému nebezpečí ze strany nepovšimnutého predátora.

Můžeme se donekonečna dohadovat, zda výsledné uspořádání, kterým příroda člověka vybavila, je skutečně optimální. Podnětem k zamyšlení nám může být třeba starořímský Janus, bůh bran a dveří, počátku a konce, po němž je pojmenován první měsíc roku (leden, latinsky *Ianuaris*). V uměleckých dílech je Janus v souladu se svou funkcí vždy zobrazován se dvěma tvářemi, jednou vpředu s pohledem mířícím vpřed (což symbolizovalo nadcházející rok) a druhou vzadu na temeni hlavy (hledící na uplynulý rok). U lidí by takové rozvržení mohlo být sice k určitým účelům vhodné, nenechalo by však dost místa pro důležité části mozku, které nejsou přímo propojené se soustavou smyslů. Martin Gardner v knize *The New Ambidextrous Universe* (Nový obouruký vesmír) vypráví příběh chicagského komika,¹¹ který bavit obecnostvo výstupem, v němž probíral výhody různých smyslových orgánů na neobvyklých místech těla. Uši v podpaží by například v mrazivé chicagské zimě netrpěly chladem. S takovým umístěním by však jistě nastaly i určité potíže: jejich sluchová funkce by byla podstatně zhoršená, pakliže by člověk nechodil neustále s pažemi nahoru.

SYMETRIE

Sci-fi filmy předvádějí vesmírné vetřelce, kteří jsou prakticky bez výjimky obdařeni dvoustrannou souměrností. Jestliže mimozemské inteligentní bytosti, které se vyvinuly biologickou evolucí, vskutku existují, jaká je pravděpodobnost, že budou nadány zrcadlovou symetrií? Poměrně značná. Jelikož zákony fyziky, zejména zákony gravitace a pohybu, mají univerzální platnost, musí se životní formy na planetách mimo naši sluneční soustavu vyrovnávat v zásadě se stejnými podmínkami jako život na Zemi. I jinde drží síla přitažlivosti všechno na povrchu planety, což vede k rozlišování mezi nahoře a dole. Pohyb pak podobným způsobem odlišuje přední část od zadní. E. T. je, či byl, pravděpodobně obouruký, tzn. neměl vyvinutější pravou ani levou ruku. To ale ještě neznamená, že případná delegace mimozemšťanů se nám musí podobat. Jakákoli civilizace vyvinutá dostatečně na to, aby podnikala mezihvězdné lety, by pravděpodobně již dávno prošla procesem sloučení inteligentního biologického druhu s jeho daleko výkonnějším výtvozem založeným na informační technologii. Na počítačích založená superinteligence¹² bude mít s největší pravděpodobností miniaturní velikost.

Mezi nesčetnými lidskými výtvoři, které se vyznačují zrcadlovou symetrií, jsou i některá velká písmena. Díváme-li se na list papíru popsaný písmeny A, H, M, O, T, Ů, V do zrcadla, vypadají písmena stejně. Slova (nebo celé věty) sestavená z těchto písmen seřazených vertikálně zůstanou v zrcadle stejná. Příkladem může být následující vzkaz:

T
Ů
M
O

M
Á
M

H
O
T
O
V
O