KAPITOLA DEVÁTÁ

CITLIVÝ CHAOS

Chtěl bych
jen se pokusit,
prach tohoto světa smýt
kapičkami rosy.

Bašó

Japonský básník Bašó se narodil roku 1644 v Uenu v rodině samuraje nižší hodnosti ve službách rodiny Tódó. Ve věku čtyřiceti let se vydal na první sérii cest, které zaznamenal v *Pamětech kostry vystavené vlivu počasí*. Jeho výše citovaná báseň popisuje jaro v Saigjóově poustevně: „Pověstné jaro bylo přesně takové, jak jej básník popsal, ronící čiré kapky vody za zvuků kapy-kap."

Bašó hledal obnovení své identity v meditacích o přírodě a krásu nalézal i ve věcech tak jednoduchých, jako je padající kapka vody. Půjdeme v jeho stopách, ale budeme hledat krásu na opačném pólu, tu matematickou spíš než tu poetickou. Ty dvě spolu souvisejí, obě hledají jednoduchost ve složitosti.

Obrazce tvořené proudící vodou kromě Bašóa fascinovaly mnoho dalších lidí. V Královské knihovně ve Windsoru například mají mnoho kreseb spletitých kaskád od Leonarda da Vinciho (obrázek 68). Výstižně zachytit tečení představuje výzvu pro každého umělce. Lidé, kteří si budou jeho díla prohlížet, dobře vědí, jak se voda chová, a když to obraz nevystihuje dobře, ihned si všimnou, že něco není v pořádku. Ale není to dojem formulovaný vědomě: poznají, že je tam chyba, ale jen zřídka budou tušit, kde by mohla být. Stejně jako já, když se v hospodě podívám na obrázek loveckých koní, vidím, že vypadají nějak prapodivně, a dokonce i tuším, čím to je. Možná je špatně úhel, jak mají při běhu nohy, nebo možná výška koňského těla nad zemí. Ale ani za nic bych nebyl schopný vysvětlit, jak cválajícího koně nakreslit.

Leonardo spojil instinkt vědce s viděním umělce a vědomě podnikl kroky pro zlepšení výstižnosti svých děl. Pečlivě prostudoval zvířata, lidské tělo,

Obrázek 68. Leonardo da Vinci: *Proud* (hrad Windsor, královská knihovna © Její veličenstvo královna).

mraky, stromy – cokoli jen může malíř či sochař chtít zobrazit. A on i jeho současníci věnovali zvlášť velkou pozornost vodě.

Voda se tehdy považovala za jeden ze čtyř živlů, z nichž je stvořen celý vesmír, a tedy byla víc než pouhou kapalinou. Byl to symbol běhu života, protože voda, stejně jako život, *plyne*. Rodí se, vyrůstá, hýbe se, mění se, umírá. Potůček od pramene se promění v bystřinu, řeku, valící se dravý proud, oceán. Řeka může klikatě meandrovat napříč rovinou, vyřezávat hluboké kaňony do prastarých skal uložených na dno moře před stamiliony let, vrhat se do propasti jako velkolepý vodopád nebo se nechat zanést bahnem a rozprostřít se do gigantické delty svého ústí. Z klidného moře se může stát zuřivé monstrum s napěněnými příbojovými vlnami, moře zmítané bouří může znenadání utichnout v klidné a rovné. Německý básník z konce osmnáctého století Friedrich Leopold, Freiherr von Hardenberg, který používal literární pseudonym Novalis, vodu nazýval „citlivý chaos“.

To není špatně vyjádřené.

Tajemství vodovodního kohoutku

Obvykle považujeme vodu za něco samozřejmého. Je to něco, co teče z kohoutku. Málokdy si vzpomeneme na ohromné dílo techniky v pozadí této všední skutečnosti. Až se jednoho dne zřítí viktoriánský tunel, který přivádí vodu právě do našeho kraje, získají takové myšlenky novou dimenzi naléhavosti, ale prozatím, když si myjeme ruce nebo plníme kýbl vodou, jsou naše myšlenky někde daleko.

Jaký nástroj by mohl při noření se do hloubky citlivého chaosu pomoci lépe než obyčejný vodovodní kohoutek?

Podívali jste se někdy, jak teče voda z kohoutku? Myslím *opravdu* podívali, ne že jste do ní strčili kartáček na zuby. Inspirován svou vlastní výřečností jsem to dnes ráno pravděpodobně poprvé v životě udělal. Nemůžu zaručit, že váš kohoutek bude dělat totéž, co dělal můj, ale stejně tento pokus doporučuji, zjistíte spoustu věcí. Řeknu vám, co jsem viděl já.

Podstatou vědeckých pozorování je systematičnost. Připouštím, že k mnohým důležitým objevům, jako je třeba antibakteriální působení penicilínu, se dospělo náhodou, ale i ty musejí být potvrzeny a využity metodami systematičtějšími. Když bude milion opic bušit do psacích strojů, jednou napíšou určitě i *Hamleta*, ale nechtěl bych na to čekat. Takže jsem se pustil do systematičtější činnosti. Jak se mění vzhled vody vytékající z kohoutku, když budeme *pomalu* zvyšovat průtok?

Otevřete kohoutek jenom trošku. Co se stane? Kohoutek kape, pochopitelně. Když se pohyb ustálí, je vidět, že kohoutek kape pravidelně a intervaly mezi jednotlivými kapkami jsou konstantní.

Otevřete kohoutek o maličko víc. Rychlost kapání se zvyšuje, ale stále kape pravidelně. Stále po nepatrných krocích zvyšujte průtok: děje se pořád totéž. Trpělivost. Život vědce je jedno nekonečné období poklidu přerušované chvilkami dramatu a vzrušení.

Je jistý bod, ve kterém se padající kapky spojí dohromady a utvoří ustálený proud. Máte ho? Dobrá. Ale jsem nucen poukázat na to, že jsme propásli jednu opravdu zajímavou pasáž. *Předtím*, než se kapky spojí v proud, dojde ještě k několika dalším fázovým přechodům poměrně rychle za sebou. Pokud jste byli netrpěliví a zvyšovali průtok po příliš velkých krocích, vraťte se zpátky a zkuste to znovu.

Prvním z těchto přechodů je změna rytmu padajících kapek. Z pravidelného *kap-kap-kap* se stane spíš něco jako *kapykap-kapykap-kapykap*, dvojice kapek v rychlém sledu za sebou, pauza, další dvojice. Pořád je to pravidelné, ale je to jiné.

S dobrým vybavením by se vám mohlo podařit najít další změny v rytmu, zase jiné a taky pravidelné. Očima a ušima se mi to nepodařilo. Dál jsem viděl něco mnohem podivnějšího. Kapky začaly padat *nepravidelně*. Už padají poměrně rychle za sebou, ale pořád je vidět a slyšet oddělené kapky. Rytmický zvuk je pryč a vystřídalo ho něco mnohem složitějšího.

Takže tady je na rozmyšlení další přechod: kapky, které ztratí rytmus.

Brzy poté, jak už jsem řekl, se kapky spojí v ustálený tok. Tok se může zpočátku ještě v dolní části trhat na jednotlivé kapky, ale brzy začne být klidný a hladký. Tenký zužující se provázek z kohoutku do umyvadla. Specialisté na dynamiku kapalin tomu říkají *laminární* proudění: kapalina se pohybuje v tenkých vrstvách (latinsky *laminae*), které po sobě hladce kloužou, jako když se balíček karet rozhodí po stole.

Zvyšte průtok na přibližně normální úroveň. Vytékající proud je stále laminární, i když se může vzhled vody změnit, jako kdyby se proud snažil rozdělit na dvě části, nebo možná do spirály. Teď pustě vodu úplně naplno. Hladké laminární proudění se rozbije, voda naráží na umyvadlo velikou silou a tok je zpěněný a zase nepravidelný. Je to *turbulentní* proudění a máme zde druhý důležitý přechod: z laminárního proudění na turbulentní.

Zavřete kohoutek, vytřete podlahu, pokus je ukončen. Teď je na řadě matematika.

Nahromaděné chvění

Viděli jsme dvě verze přechodu k turbulenci. Při prvním se mění rytmus kapek a fakticky máme diskrétní dynamický systém (za předpokladu, že zanedbáme detailní strukturu jednotlivých kapek). V druhém případě, kdy se laminární proud mění na turbulentní, se jedná o spojitý systém. V obou případech se z pravidelného chování najednou stane nepravidelné.

Turbulence hrají nesmírně důležitou roli v mnoha odvětvích vědy od astronomie po meteorologii (obrázek 69). Jsou také důležité pro inženýrskou praxi. Turbulence může zničit vodovodní trubku nebo ropovod, zlomit lodní šroub a způsobit pád letadla. Inženýři vyvinuli různé metody založené na zkušenostech i na promyšlených statistikách, jak se s turbulencemi vypořádat v praxi. Ale pravá vnitřní podstata turbulence představuje problém vyššího řádu.

Základní výzkum tohoto druhu je spíš úlohou pro fyziky než pro inženýry. Co si s turbulencemi počne matematická fyzika klasické školy?

Klasickou rovnici proudění viskózních tekutin z Eulerovy rovnice odvodili Francouz Claude Navier a George Stokes z Irska. Proudění tekutin podle Navierovy-Stokesovy parciální diferenciální rovnice je deterministické a předvídatelné. Před nástupem chaosu se to považovalo za synonymum pro „pravidelné“. Ale turbulence je nepravidelná. Závěr: s rovnicí je něco špatně.

To je klidně možné. Rovnice přece popisují vysoce idealizovanou tekutinu, která je nekonečně dělitelná a homogenní. Ale reálná tekutina se skládá z atomů. (Svou oblíbenou úroveň podrobnosti od droboučkých pevných kuliček po kvantové víry pravděpodobnosti si mezi navzájem soupeřícími teoriemi vyberte sami.) Zdá se, že v turbulenci se vyskytují nepatrnější a nepatrnější víry. Ale vír velikosti menší než atom je fyzikální nesmysl. Pokud by skutečná tekutina měla dodržovat Navierovu-Stokesovu rovnici tak detailně, musela by své vlastní atomy roztrhat.

Turbulence by se tedy možná dala vysvětlit jako makroskopický projev atomové struktury. Nepřesnosti atomové dimenze v Navierových-Stokesových rovnicích se fyzikálním tokem rozmnoží, narostou na velikosti a dají se pozorovat jako turbulence. To byla Lerayova teorie z roku 1934, tedy z doby, kdy byla atomová teorie obzvlášť novátorská a módní.

O deset let později si matematický fyzik Lev Landau uvědomil, že existuje ještě jiná možnost. Článek, který sepsal v roce 1944, začíná: „Přestože se o turbulentním chování rozsáhle pojednává v literatuře, pravá podstata tohoto jevu stále postrádá dostatečné objasnění.“ Dále Landau vystihl klíčovou otázku:

Obrázek 69. Turbulence v atmosféře Jupiteru poblíž Velké rudé skvrny.

odkud se turbulence bere? „Dle autorova názoru se problém může začít jevit v jiném světle, až bude důkladně prozkoumán proces inicializace turbulence.“

Představte si systém usazený v stabilním stavu. Někdy, třeba když se vhodně změní vnější vlivy, může tento stav přestat být stabilní. Například objekt, který stabilně leží na stole, může sklouznout, když stůl nakloníme, nebo balón může prasknout, když ho příliš nahustíme.

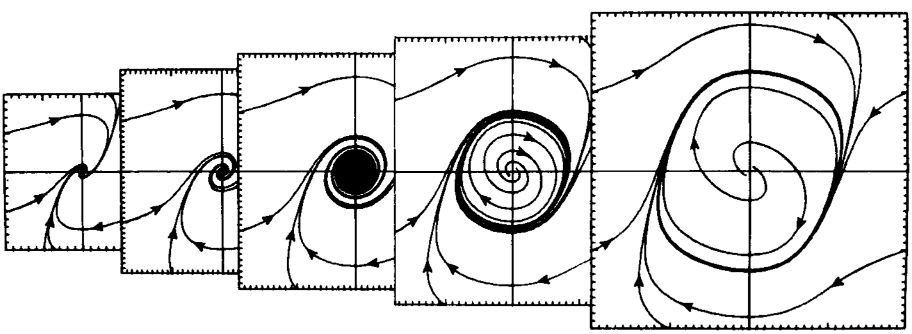
Když si nechávám vyměnit pneumatiky na autě, automechanik kolo nasadí na úžasný stroj, který s kolem točí dokola. Podle čísel, která se objevují na displeji, natluče mechanik do ráfku závažíčka, aby kolo vyvážil. Důvodem pro tohle kouzlení je, že nevyvážené kolo se začne při příliš vysokých otáčkách chvět.

V dynamice je matematika chvění fundamentální. Jeden z nejzákladnějších způsobů, jak může stav ztratit stabilitu, je právě kvůli chvění.

Když doposud stabilní stav přejde do chvění, je k jeho stávajícímu pohybu přidán nový periodický pohyb. Kolo, které se hladce otáčelo, začne vibrovat, takže se tu skládají dva periodické pohyby: rotace a vibrace.

Landau vznik turbulence považoval za nahromaděné chvění. Vyslovil teorii, že z počátku je turbulence složením tří nebo čtyř různých periodických pohybů, a když se plně rozvine, počet periodických pohybů začne být nekonečný.

Základním mechanismem vzniku chvění je takzvaná *Hopfova bifurkace* pojmenovaná po Eberhardu Hopfovi. Stok (klidový stav) začne být nestabilní a promění se ve zdroj obklopený limitním cyklem reprezentujícím periodický pohyb (obrázek 70). V roce 1948 Hopf navrhl poněkud podrobnější teorii ve stejném duchu jako Landau. Nedlouho předtím studoval holandský



Obrázek 70. Nástup chvění, aneb Jak se z klidového stavu stane periodický. Mechanismu se říká Hopfova bifurkace: stok ztrácí stabilitu a stane se zdrojem, z nějž se odtrhne limitní cyklus. (Reprodukce se svolením John Wiley & Sons, Ltd. ©1986.)

vědec Johannes Martinus Burgers zjednodušenou verzi Navierových-Stokesových rovnic a Hopf si osvojil podobnou taktiku. Přišel s dalším přibližným modelem, který se zcela výjimečně dal vyřešit explicitně, a ukázal, že postupuje podle Landauova scénáře akumulace chvění.

Hopfova-Landauova teorie byla během dalších tří desetiletí obecně přijímána a používána. Měla několik kladů. Byla jednoduchá a srozumitelná. Mechanismus, kterým se k pohybu přidávala další frekvence, byl základní a přirozený. Existovaly modelové rovnice, jako ta Hopfova, ve kterých se tento scénář prokazatelně vyskytoval. A fungovaly pro ni klasické techniky jako třeba Fourierova analýza takže se s ní daly provádět výpočty.

Nepravděpodobný scénář

Ale v roce 1970 byl tento úhledný obrázek narušen. Nebyl roztříštěn, protože pochybnosti přišly z oblasti mimo dynamiku tekutin, byly vysoce spekulativní a postrádaly jakoukoli podporu experimentu. A co horšího, nebyly odvozeny z fyziky proudění tekutin, ale z topologie.

Belgický matematik David Ruelle, který pracoval na Istitutu des Hautes Études Scientifiques v Paříži, a hostující Floris Takens z Holandska začali o turbulencích uvažovat z pohledu topologické dynamiky *ŕ la* Smale. Je pro vznik turbulence nějaký *typický* scénář, generický proces?

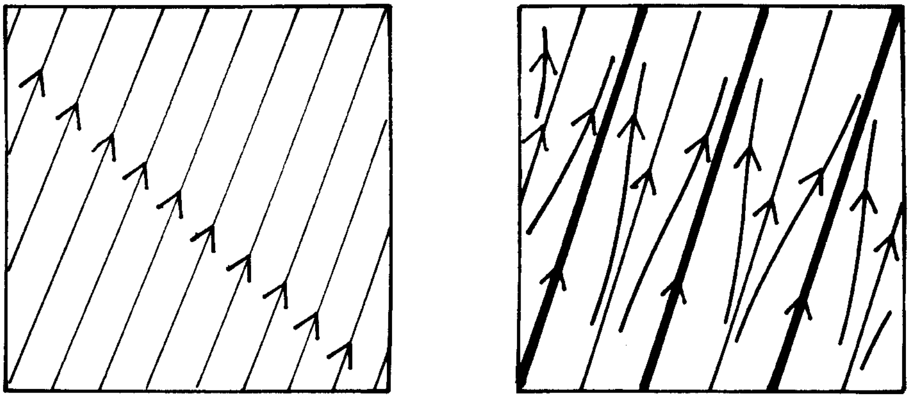
To není tak jasné. Ale když začneme takhle přemýšlet, tak *je* jasné, že Hopfova-Landauova *prostě nemůže být správně*. Protože i když každé z hromaděných chvění může z matematického i z fyzikálního hlediska vypadat přijatelné, tak není. Jenom to první.

Intuice Hopfovi a Landauovi napovídala vyjít do jisté míry z hamiltonovské dynamiky. Tam zachování energie předepisuje omezení, díky nimž jsou mnohafrekvenční kvaziperiodická chování běžným jevem. Toto omezení se ovšem nevztahuje na nekonzervativní systémy – systémy s třením. A v toku viskózní tekutiny je tření spousta.

Ruelle a Takens dospěli k následujícímu obrázku.

První přechod z klidového stavu na jediné chvění je typický i pro nekonzervativní systémy: vzniká periodické chování. Tady žádné úskalí není.

Druhý přechod, přidání další frekvence, určitě může nastat. Zpočátku vede k pohybu, který je z topologického hlediska tok na dvojdimenzionálním toru a vypadá jako kvaziperiodické složení dvou nezávislých periodických pohybů. Ale takový nezůstane, protože takový pohyb není typický, není generický. V praxi jej rozbije sebemenší narušení.



Obrázek 71. Fázový závěs: (*vlevo*) dvě nezávislé periodické oscilace složené dohromady, (*vpravo*) tok se rozpadá a vytváří jediný stabilní periodický cyklus (tučně) a jeden nestabilní periodický cyklus. Pro větší přehlednost obrázku byl torus, na kterém se pohyb odehrává, rozříznut a rozprostřen do čtverce.

V té době už existovala klasifikace všech typických generických strukturálně stabilních toků na toru a vyplýval z ní jev dobře známý elektroinženýrům, který se jmenuje *fázový závěs* (obrázek 71). Dva původně nezávislé pohyby se začnou vzájemně ovlivňovat a být provázané, až vznikne složený periodický pohyb s jedinou, složenou periodou.

Při skládání tří frekvencí se to pokazí ještě mnohem dramatičtěji. Tři frekvence typicky v závěsu nejsou. Místo toho se mohou spojit a utvořit nový objekt, který Ruelle a Takens nazvali *podivný atraktor*. Solenoid je podivný atraktor a Lorenzův atraktor (jak se věří) také. Podivné atraktory mají podivné geometrie.

Základem Ruelleovy-Takensovy teorie je skutečnost, že Hopfův-Landauův scénář je z topologova hlediska asi stejně pravděpodobný, jako špendlík balancující na špičce. Špendlík je nestabilní, Hopfova-Landauova teorie je *strukturálně* nestabilní. Když se pohne se špendlíkem, skácí se a spadne na stůl. Když se rovnice pohybu nepatrně pozmění, Hopfův-Landauův scénář se rozpadne a zhroutí v podivný atraktor.

Falzifikace

Z Ruelleova a Takensova návrhu nebyli v dynamice tekutin nadšeni zdaleka všichni. Vlastně byl docela kontroverzní. Ale pár lidí – jak se ukázalo, tak dost – se jím nechalo inspirovat a postoupilo do další fáze. *Je to pěkné, ale je to správně?*

Je jeden prastarý způsob, jak ve vědě zjistit, jestli teorie platí.

Pokus.

Přesněji řečeno z pokusu lze poznat, že teorie *neplatí*, protože správnost teorie není stoprocentně jistá nikdy. Matematická věta se dokázat dá, ale teorie se dokázat nedá. Jak zdůrazňoval filozof Karl Popper, ověřování vědecké teorie není záležitost *verifikace*, ale *falzifikace*. Čím déle odolává vědecká teorie pokusům o falzifikaci experimentem, tím pravděpodobnější je, že platí. Nebo aspoň tím širší je pásmo podmínek, za kterých správná je. Ale nikdy si nemůžeme být jistí absolutní platností teorie, i kdyby experimentálních testů přestála milion, protože – kdo ví? – může selhat při milion prvním.

Jak se tedy přibližuje třetí tisíciletí, vědci upouštějí od honby za Pravdou.

Přitom se samozřejmě velice snaží nedělat chyby. Ale už nežijeme v éře absolutna. Učíme se, i když strašlivě pomalu, nebrat se příliš vážně.

Aby byla teorie považována za vědeckou, musí být v principu falzifikovatelná. Na ostrově Korfu mají pověru, že spatřit kudlanku nosí buď štěstí, anebo smůlu podle toho, co se potom stane. Toto přesvědčení se mezi vědecké teorie nepočítá, ale ne proto, že se nedá měřit „štěstí“, ale proto, že není moc jasné, jak by experiment mohl teorii vyvrátit, i kdyby štěstí měřit šlo.

To vůbec neznamená, že obyvatelé Korfu *nemají pravdu*. Probíráme zde omezení na vědecké znalosti. Na světě mohou být pravdivé věci, které nemohou být známy ve vědeckém smyslu. Rozřešit debaty, které se o nich vedou, půjde ovšem těžko.

Laboratorní klasika

Je teorie podivných atraktorů falzifikovatelná?

Rozhodně nebyla falzifikovatelná přímo tak, jak byla původně vyslovena. Nemůžeme jít a v přírodě hledat podivné atraktory, takže ani nemůžeme žádný najít. Matematický popis takového atraktoru v Ruelleově-Takensově teorii totiž nijak nesouvisí s žádnou fyzikálně měřitelnou veličinou. Takže z hlediska falzifikovatelnosti to nevypadá o moc lépe než teorie, která tvrdí, že turbulence je dílem neviditelných příšer plovoucích tekutinou, příšer, které se žádným fyzikálním aparátem nedají zachytit.

Můžeme to obejít několika způsoby. Jedním je zlepšit kontakt mezi matematikou a fyzikou. To v případě turbulence vypadalo velmi těžko proveditelné – což *neznamená*, že to není důležité. Dalším je udělat krok stranou. Možná bychom mohli podivné atraktory přimět, aby se projevily nepřímo.

Hopfova-Landauova teorie je zjevně falzifikovatelná mnohem lépe. Stačí změřit frekvence jednotlivých složek pohybu a sledovat, zda se chvění vrší předepsaným způsobem. Pokud ne, Hopfova-Landauova teorie to má spočítané.

Takže místo, abychom se snažili o důkaz, že Ruelle a Takens mají pravdu, můžeme zkoušet ukázat, že Hopf a Landau pravdu nemají. Historicky to ale přesně takhle neproběhlo. Místo toho se experimentátoři pustili do dokazování, že Hopf a Landau pravdu *mají*.

Ale to už, mohli byste si myslet, měli fyzici určitě za sebou. Konec konců, Hopfova-Landauova teorie byla obecně přijímána po několik desetiletí.

Ne tak docela. Existovala pozorování prvních několika fází, ale jak se chvění vršila, bylo stále těžší změřit je dostatečně přesně.

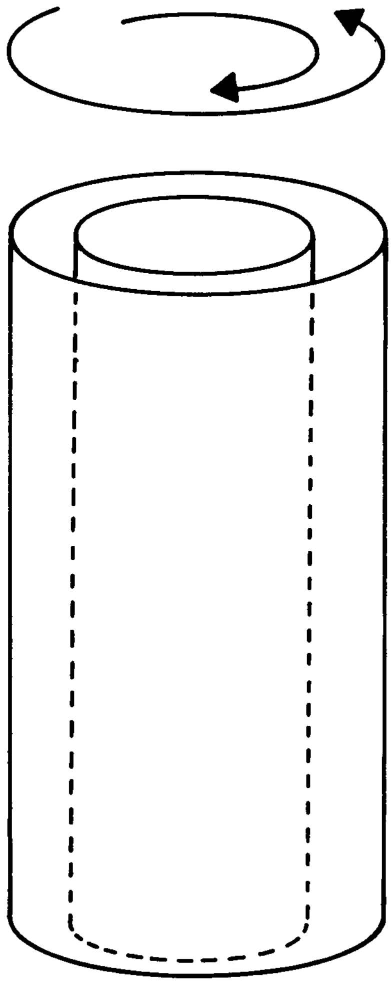
K dalšímu pokroku byl potřeba nový nápad.

Harry Swinney, fyzik z Texaské university v Austinu, zahájil svou kariéru experimentátora prací na fázových přechodech. Když se voda vaří, kov taví, nebo magnet magnetizuje, jedná se o fázový přechod: makroskopickou změnu stavu založenou na reorganizaci na molekulární úrovni. V jistém smyslu je přechod do turbulence také jakýmsi fázovým přechodem v tekutině. Někteří významní odborníci na dynamiku tekutin, jako například Osborne Reynolds nebo lord Rayleigh, o nich dokonce takto uvažovali. Ale analogie vypadala příliš volná, příliš nepřesná na to, aby mohla být použitelná matematicky.

Nicméně Swinneyho to přimělo k zamyšlení. Daly by se metody používané na výzkum choulostivých jevů při fázových přechodech aplikovat na tekutiny?

Je mnoho způsobů, jak tekutina začíná být turbulentní. Při navrhování pokusu musíme ze všeho nejdřív vybrat vhodný systém. Základní výzkum není zaměřen na specifické cíle, jako například „zjistit nejlepší tvar klapek na křídlech pro tryskáč“, takže si může dovolit přepych výběru systému, se kterým bude pracovat. Pro laboratorní pokusy ve vědě je důležité, aby byl systém „čistý“. Nemám na mysli, že by neměl být upatlaný, ale měl by být snadno sestavitelný a spustitelný, měly by z něj být přesné výsledky a při opakovaném spuštění by měl dělat totéž.

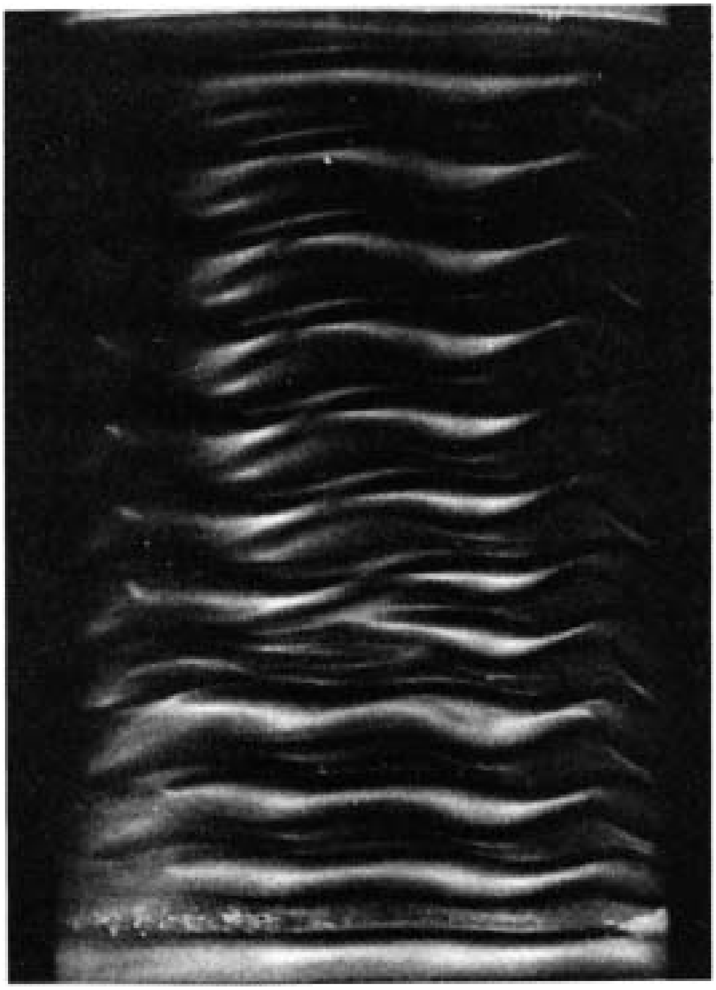
V dynamice tekutin je jeden klasický laboratorní systém, který původně sestavil francouzský hydrodynamik Maurice Couette. Chtěl zkoumat „smykové toky“, ve kterých je tekutina roztrhaná, a vymyslel soustavu dvou válců, jeden uvnitř druhého (obrázek 72). Když je vnější válec pevný a vnitřní rotuje, dochází k neměnnému a ovladatelnému smyku.



Obrázek 72. Aparatura pro Taylorův-Couetteův experiment (schematicky). Prostor mezi dvěma válci je vyplněn tekutinou a válce se otáčí. Mezera mezi válci je zde pro lepší přehlednost zvětšená, obvykle činí 10–20 % poloměru vnějšího válce.

Člověk by čekal, že se voda bude točit spolu s vnitřním válcem, uprostřed rychle a na vnějším kraji pomalu. A to také Couette zjistil.

Anglický odborník na aplikovanou matematiku Geoffrey Ingram Taylor v roce 1923 pokusně zrychloval rotaci vnitřního válce a objevil něco záhadného. Při dost vysoké rychlosti se voda přestane točit pořád hladce dokola, ale rozdělí se do dvojic vírů, asi jako Besipky bez obalu. Opravdu se jedná



Obrázek 73. Zvlněné víry při Taylorově-Couetteově experimentu. Všimněte si narušení zhruba ve dvou třetinách obrázku shora, kde probíhá proces změny počtu vln.

o krásný příklad nestability Hopfova-Landauova typu, při které se vytvoří nový periodický pohyb. Ale to je jen první dějství Hopfova-Landauova scénáře.

Experimentátoři i teoretici následně studovali Couetteův-Taylorův systém (nebo také Taylorův-Couetteův systém, jak jej nefrankofilové často nazývají) velice podrobně. Dost možná je to ten nejprostudovanější ze všech toků. Našli náramně různorodé obrazce a formace. Víry mohou být zvlněné (obrázek 73).

Vlny se mohou houpat nahoru a dolů jako koník na kolotoči, takže vznikají modulované zvlněné víry. Jsou tam zkroucené víry a opletené víry. Vyskytují se tam spirálovité útvary, zvlněné spirály, modulované zvlněné spirály a navzájem se prostupující spirály.

Při vysokých rychlostech systém začne být turbulentní.

Takové bohatství různých typů chování se dá vytvořit pomocí zařízení o velikosti a tvaru termosky a všechno se to dá přesně zopakovat. Takže se Swinney a jeho spolupracovník Jerry Gollub rozhodli provést svůj pokus na této laboratorní klasice.

Laserem osvícení

Měření proudící tekutiny se tehdy obvykle prováděla pomocí vložených sond nebo vstříknutého praménku barviva. Tyto metody proudění ovlivňovaly a nebyly příliš citlivé ani přesné, ale lidé z oboru na takové problémy byli zvyklí a nic lepšího nečekali. Swinneymu ovšem padla do oka mnohem citlivější věc: laser.

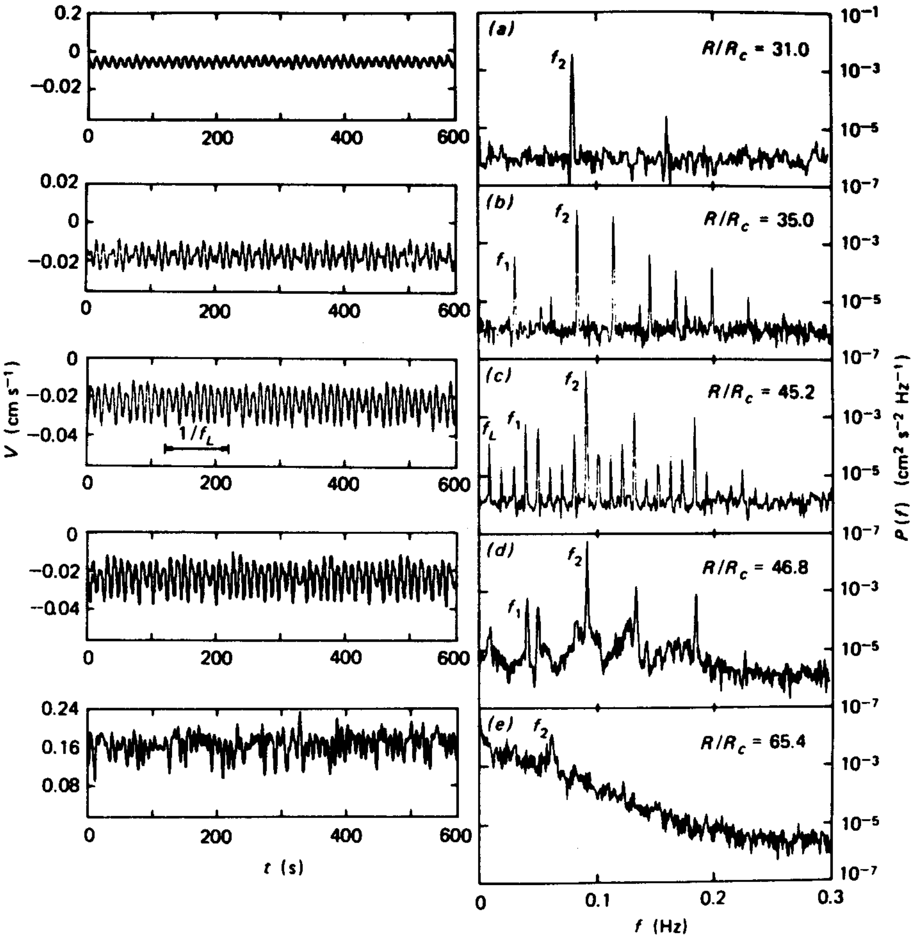
Dnes jsou lasery běžné. Pokud máte CD přehrávač, máte laser. Jak ví každý fanoušek *Hvězdných válek*, laser je to, čím se likvidují císařské stráže. Lasery vydávají paprsek koherentního záření – světla, ve kterém jsou všechny vlny ve fázi a navzájem se neruší, ale posilují. Je to velmi přesná a ostrá baterka.

Až uslyšíte sirénu požárního auta, které pojede kolem vás, všimněte si, že když auto projede kolem, výška tónu se zdánlivě změní, siréna je najednou nižší. To je Dopplerův jev pojmenovaný po rakouském vědci Christianu Dopplerovi, který si ho všiml jako první v roce 1842. Když se hasiči blíží, jsou zvukové vlny vlastně urychlovány, kdežto když se vzdalují, jsou zpomalovány.

Stejný jev funguje i se světlem, jen se zde při změnách frekvence mění barva. Když laserem posvítíme na hasičské auto a porovnáme barvu odraženého světla s původním, můžeme určit, jak rychle hasiči jedou.

Víc k věci: když se do tekutiny vmísíme nepatrné šupinky hliníkového prášku, můžeme laser použít na zjištění, jak rychle se šupinky – a patrně také tekutina – pohybují. Této technice se říká dopplerovský laserový rychloměr.

Komplikovaný signál, který je směsicí různých frekvencí, potom lze matematicky analyzovat a rozdělit na jednotlivé složky. Můžeme také zjistit, jak silné jednotlivé komponenty jsou – jak moc přispívají k celku. Používá se v podstatě Fourierova analýza: vyjádření libovolné křivky jako součtu sinových a kosinových křivek.



Obrázek 74. Časová řada získaná pozorováním proudění a odpovídající frekvenční spektra, která ukazují, jak se mění intenzita jednotlivých složek frekvence. Hroty naznačují dobře definované frekvence periodických nebo kvaziperiodických dějů, široké pásy znamenají chaos.

Výsledek této analýzy se dá shrnout do *frekvenčního spektra*, neboli grafu ukazujícího intenzitu jednotlivých složek frekvence (obrázek 74). Na obrázku je pět sad pozorování (levý graf) spolu s jejich frekvenčními spektry (vpravo). Dole jsou uvedeny doba pozorování (v sekundách, s) a frekvence (v hertzích, 1 Hz odpovídá jednomu kmitu za sekundu).

Obrázek vlevo nahoře například zobrazuje velice pravidelný rytmus s jednou oscilací za zhruba deset sekund. V příslušném frekvenčním spektru vpravo je to zachyceno jako hrot označený f_2 poblíž 0,1 Hz. Druhá řada pozorování je mnohem méně pravidelná a v jejím spektru je hrotů několik. Pro trénované oko není těžké zjistit, že všechny vznikly posčítáním násobků dvou základních frekvencí f_1 a f_2 přibližně 0,03 Hz a 0,1 Hz.

Tyto hroty na frekvenčním spektru odpovídají přesně definovaným dílčím frekvencím, které jsou mnohem silnější než okolní frekvence. Kvaziperiodický signál má ve svém spektru hlavně ostré hroty jako na horních třech záznamech obrázku 74. Rušený signál má širokopásmové spektrum, jehož dílčí frekvence jsou setřené jako na posledním obrázku. Také je možná kombinace těchto dvou možností, jak je vidět na obrázku čtvrtém.

Frekvenční spektrum je něco jako „frekvenční otisky prstů" řady pozorování a dá se z něj zjistit přítomnost jistých typů chování.

Z dat získaných pomocí svého laseru Swinney a Gollub na počítači zjistili frekvenční spektrum rychlosti tekutiny. To je přesně to, co je potřeba na zpozorování vzniku nových frekvencí, jak je předpověděli Hopf a Landau.

To aspoň čekali.

Hledali první přechod a našli jej. Pokus mnohokrát opakovali a dostali velmi přesná a jasná data. Tak jasná a tak přesná, až jim to odborníci na dynamiku tekutin nechtěli věřit. Jejich výsledky nechtěl nikdo publikovat a jejich žádost o grant byla zamítnuta. Někteří tvrdili, že výsledky nejsou nic nového, jiní jim nevěřili vůbec.

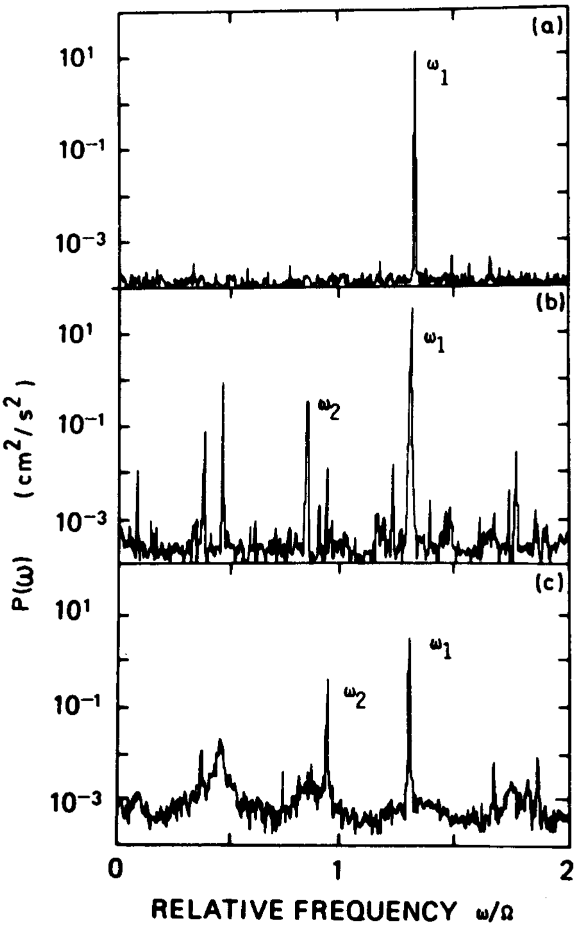
Nenechali se odradit a pokročili k hledání dalšího přechodu – a nenašli jej. Nebyl tam žádný jasný vznik nové frekvence. Namísto toho našli postupné vynořování širokého pásma frekvencí (obrázek 75). „Zjistili jsme, že to začne být chaotické."

Kontakt

Věda je rozsáhlá. Není možné vědět o všem, co se děje. To, co lidé potřebují, se dozvídají díky osobnímu styku. Swinney a Gollub otestovali Hopfovu-Landauovu teorii – a shledali ji nevyhovující. Ale v té době nevěděli o tom, že Ruelle s Takensem navrhli alternativu.

Ale věděli o tom jiní a zprávy se začaly pomalu šířit. V roce 1974 se ve Swinneyho laboratoři objevil belgický matematik – David Ruelle. Ruelle měl teorii, která předpovídala chaos. Swinney měl chaos, ale bez teorie. Zbývalo zjistit, zda to, co objevil Swinney, padne k tomu, co předpověděl Ruelle.

Nepřímo to naznačovala například skutečnost, že v přítomnosti podivných atraktorů se podle výpočtů dá očekávat širokopásmové spektrum.



Obrázek 75. Frekvenční spektrum Taylorova-Couetteova systému. Nejprve je pozorována jen jedna frekvence ω_1 (periodické oscilace), potom se objeví druhá frekvence ω_2 (spolu s dalšími hroty, které vyjadřují kombinace ω_1 a ω_2) a nakonec je patrný širokopásmový chaos. (Reprodukce se svolením John Wiley & Sons, Ltd. ©1986.) *Popisky:* relativní frekvence

Tou dobou se tempo bádání zrychlovalo. Existenci chaosu si uvědomovali další a další vědci a na jeho teoretických aspektech pracovali další a další matematici. Řada pokusů, které zprvu prováděl Swinney se svými spolupracovníky, ale brzy i další vědci, vypovídala velmi zřetelně, že se podivné atraktory vyskytují v celém spektru turbulentních toků.

Výsledky se daly aplikovat pouze na vznik turbulencí, ale přinejmenším v některých konkrétních laboratorních systémech teorie podivných atraktorů v turbulencích obstála a Hopfova-Landauova teorie neměla sebemenší šanci na úspěch. Ironií je, že o většině matematických podrobností od Ruelleho a Takense se ukázalo, že jsou nepodstatné nebo dokonce chybné – ne po matematické stránce, ale v jejich interpretaci pro experiment. Ale hlavní myšlenka... Tam to vypadalo, že narazili na zlato.

Nicméně pořád to nebylo jisté.

Mohlo být i jiné vysvětlení pro pozorované jevy. Bylo potřeba něco přímočařejšího, něco, co by hypotézu podivných atraktorů udělalo falzifikovatelnou pokusem.

A na to byl potřeba další nápad.

Falešné pozorovatelné

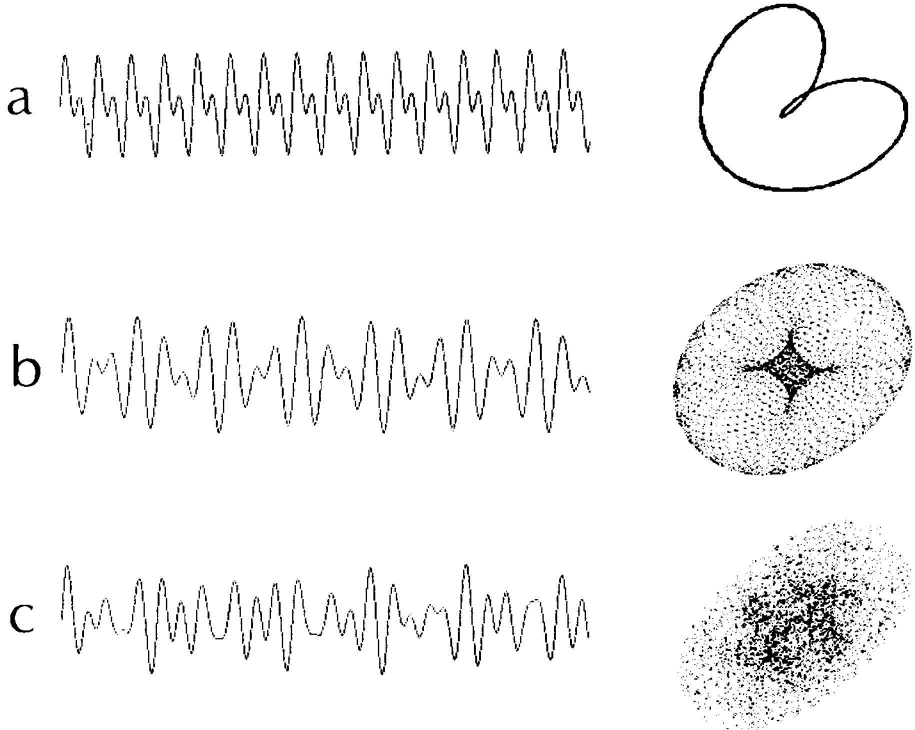
Ruelleův a Takensův článek z roku 1970 se nedá označit úplně za teorii turbulence, ale spíš za počátek takové teorie. Hlavním chybějícím prvkem bylo pojítko mezi topologií a fyzikou. Pokud by například existovala nějaká hodnota, kterou bychom mohli změřit, zanést do grafu a ve výsledku vyhledat podivný atraktor, teorie by byla falzifikovatelná. Pokud bychom takový pokus provedli a podivný atraktor nenašli, zjistili bychom, že je teorie chybná.

Co je pokusná pozorovatelná? To je veličina závislá na stavu systému, který se pozoruje. V topologické teorii turbulence chybí znalost toho, jak na sobě věci navzájem závisejí. Na první pohled je těžké najít způsob, jak to obejít, leda takové pojítko vybudovat. Jedním z možných výzkumných projektů, jak postavit Ruelleovu-Takensovu teorii na ověřitelné základy, tedy bylo: *odvodit podivný atraktor z Navierových-Stokesových rovnic* pro proudění tekutiny. To je problém, který vyžaduje pokrok spíš v matematické stránce věci než v experimentální, a zatím se jej nepodařilo uskutečnit. Lorenzův atraktor se nepočítá, protože se v něm používají aproximace.

Ale je ještě jeden způsob. Předpokládejme, že tvar atraktoru ze sady pozorování můžeme zrekonstruovat způsobem, který je *nezávislý* na tom, jakou veličinu přesně sledujeme. Potom na pojítku nezáleží.

Je to pěkný trik. David Ruelle a Norman Packard si mysleli, že by mohl fungovat, a Floris Takens našel způsob, jak to dokázat.

Z posloupnosti pokusných pozorování v její nejjednodušší formě získáme *časovou řadu*: seznam čísel vyjadřujících hodnotu pozorované veličiny v pravidelných časových intervalech. (Mohou být i nepravidelné, ale nekomplikujme tím náš výklad.) Časovou řadu tvoří například teplota na daném místě každý den v poledne, něco jako



Obrázek 76. Počítačové experimenty v rekonstrukcích atraktorů pomocí Ruelleovy-Takensovy metody, dvojdimenzionální nákres: (a) z periodické časové řady sin t+sin $2t$ vzniká uzavřená křivka, (b) dvojfrekvenční časová řada sin t+sin $\sqrt{2}t$ dává torus (jeho projekci), (c) časová řada tří frekvencí sin t+sin $\sqrt{2}t$ +sin $\sqrt{3}t$ nemá ve dvojdimenzionálním nakreslení žádnou jasnou strukturu, je potřeba zakreslit ještě třetí souřadnici, aby časová řada odhalila svou kvaziperiodickou povahu.

17,3; 19,2; 16,7; 12,4; 18,3; 15,6; 11,1; 12,5; ...

ve stupních Celsia.

Předpokládejme, že taková data chceme dosadit na podivný atraktor. Problém je v tom, že očekáváme atraktor řekněme v třídimenzionálním prostoru, ale z pozorování dostáváme hodnotu jen jednu. Při měření rychlosti na základě Dopplerova jevu získáme jen frekvence odraženého světla – rychlost tekutiny v jednom konkrétním bodě, kde se laserové světlo odrazilo. Atraktor je tak stlačen do jediné dimenze. Je vidět, tak říkajíc, jeho silueta.

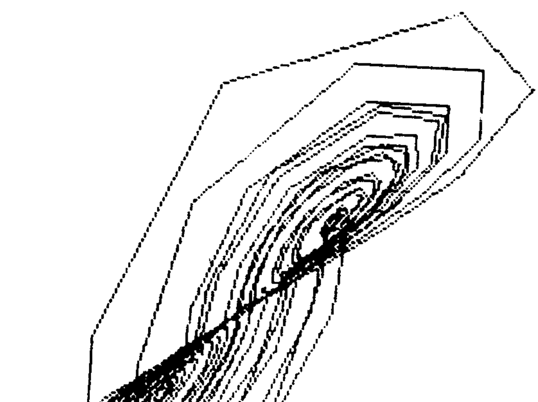
Kdybychom se na atraktor mohli podívat i z jiných směrů, mohl by jít sestavit úplný třídimenzionální obrázek, bezmála jako je architektovi tvar budovy jasný z půdorysu, nárysu a bokorysu. Na rekonstrukci třídimenzionálního atraktoru potřebujeme informace ze tří různých směrů.

Ale tyto další směry není možné najít v časové řadě jediné veličiny, nebo je? Jsou potřeba dvě další.

Ruelle si uvědomil, že se dvě další falešné pozorovatelné dají vytvořit z téže časové řady posunutím hodnoty času (obrázek 76). Místo jedné časové řady se porovnají tři takové, ta původní a dvě její kopie, posunuté o jedno a o dvě místa:

řada 1 17,3 19,2 16,7 12,4 18,3 15,6 11,1 12,5, ...
↙ ↙ ↙ ↙ ↙ ↙ ↙
řada 2 19,2 16,7 12,4 18,3 15,6 11,1 12,5, ...
↙ ↙ ↙ ↙ ↙ ↙
řada 3 16,7 12,4 18,3 15,6 11,1 12,5, ...

Tak dostaneme matematickou konfekci: časovou řadu třídimenzionálních pozorování vybudovanou z původní časové řady pozorování jednodimenzionálních. Prostě se přečtou po sobě jdoucí sloupečky trojic. Prvním z těchto falešných pozorování je zde tedy trojice (17,3; 19,2; 16,7) vyjadřující bod ve



Obrázek 77. Rekonstrukce podivného atraktoru (zde Lorenzova atraktoru) Ruelleovou-Takensovou metodou (srovnejte s obrázkem 54).

třídimenzionálním prostoru, který leží 17,3 jednotek na východ, 19,2 jednotek na sever a 16,7 jednotek nahoru od zvoleného počátku. Další je (19,2; 16,7; 12,4) a tak dále. Jak plyne čas, pohybují se tyto trojice prostorem. Ruelle vyslovil hypotézu, že dráhy těchto trojic vytyčí přibližný tvar atraktoru (obrázek 77), a Takens tuto hypotézu dokázal. Packard byl mezi prvními, kdo tuto metodu použili při pokusu.

Pro atraktor ve více dimenzích je potřeba těchto posunutých časových řad víc, ale funguje týž obecný postup. Je to výpočetní metoda, jak zrekonstruovat topologii atraktoru z jediné časové řady – a *nezáleží na tom, která veličina se použije*.

V praxi je potřeba uvážit i jiné věci, které souvisejí s efektivitou metody. Některé veličiny jsou lepší než jiné a k teorii se přidávají všelijaká vylepšení. Ale je to nápad, jak pěkně obejít potřebu nalézt v matematické teorii vůbec nějakou fyzikální proměnnou!

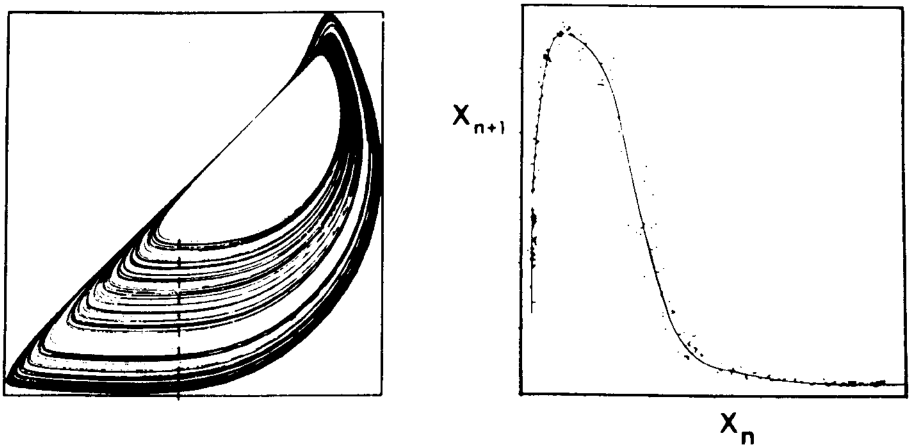
Podivná chemie

Chemické reakce mohou oscilovat. Tento jev poprvé zdokumentoval William Bray v roce 1926 při rozkladu peroxidu vodíku na vodu a kyslík za účasti jódového katalyzátoru. Ale chemici tehdy věřili (chybně), že zákony termodynamiky oscilace nedovolují. Místo aby Brayův objev rozpracovali, snažili se jej vysvětlit chybnou experimentální metodikou.

Tento přístup je zdržel asi o čtyřicet let. Ruský chemik Boris Bělousov vypozoroval periodické oscilace barvy ve směsi kyseliny citrónové, kyseliny sírové, bromidu draselného a soli ceru v roce 1958. V té době už Ilya Prigogine dokázal, že v oblastech vzdálených od termodynamické rovnováhy obvyklé termodynamické zákony neplatí, a tak byli lidé lépe připraveni brát výsledek vážně. V roce 1963 Anatolij Žabotinskij upravil Bělousovův recept, místo ceru použil soli železa a docílil dramatické střídání barvy mezi červenou a modrou. Ukázal, že pokud je chemická směs rozlita do tenké vrstvy, mohou se v ní tvořit kruhové a spirálovité vlny. Dnes je známo mnoho oscilujících chemických reakcí a běžné jsou i dynamické jevy složitější než periodicita.

Jako vzorek práce z nedávné doby popíšu článek, který v roce 1983 vyšel Swinneymu a jeho spolupracovníkům J.-C. Rouxovi a Reubenu Simoyimu v časopisu *Physica*. Nezabývá se turbulencemi v tekutinách, ale chemickými turbulencemi – chemickým chaosem – v Bělousově-Žabotinského reakci.

Při pokusu měřili, jak se průběžně mění koncentrace iontů bromu. Data podrobili různým typům matematického rozboru, zjistili jejich frekvenční

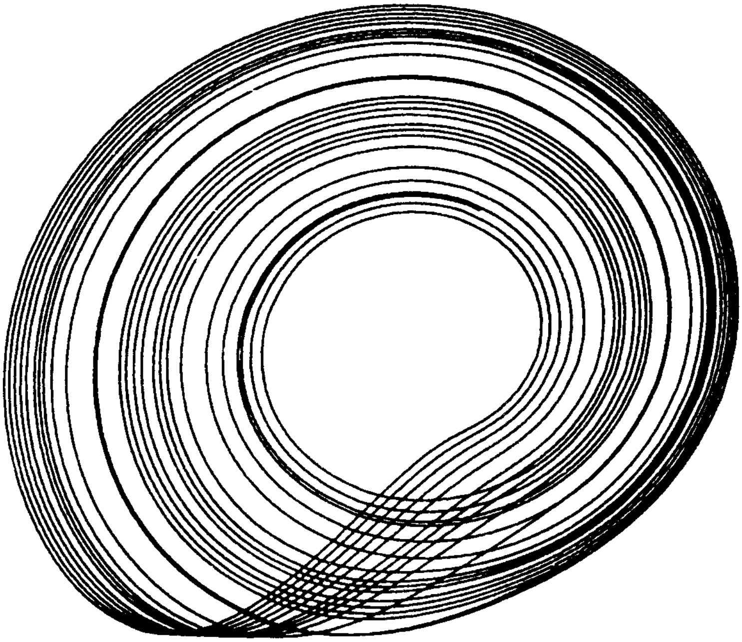


Obrázek 78. Podivný atraktor zrekonstruovaný z experimentálních dat z chaotických chemických oscilací v Bělousově-Žabotinského reakci a Poincarého zobrazení pro Poincarého řez vyznačený čárkovanou čarou. (Reprodukce se svolením John Wiley & Sons, Ltd. ©1986.)

spektrum a z něj určili dílčí frekvence oscilací. Zrekonstruovali odpovídající dynamický atraktor (obrázek 78 nalevo) pomocí druhé „falešné“ časové řady. Typická geometrie podivného atraktoru je jasně patrná. Proměnné zanesli do grafu pokaždé, když pohyb přešel přes čárkovanou čáru vyznačenou v levé polovině obrázku 78, a dostali tak Poincarého zobrazení v pravé části obrázku. Body se drží poblíž jediné křivky, z čehož je vidět, že přestože je dynamika chaotická, je vcelku jednoduchá a ne nepodobná logistickému zobrazení.

Výsledky jsou velice podrobné a v souladu se všemi matematickými skutečnostmi známými o podivných atraktorech. Obrázky jsou každopádně velmi přesvědčivé. Klidně mohly vzniknout na terminálu počítačového grafika, který kreslí nějakou analogii Lorenzova atraktoru. Vlastně opravdu blízce připomínají variantu Lorenzova atraktoru, kterou sestrojil v roce 1976 Otto Rössler (obrázek 79).

Chaos se v přírodě *vyskytuje*. Vlastně mi připadá úžasné, jak moc toho příroda asi o matematice chaosu ví. A dá se předpokládat, že to věděla dlouho předtím, než to zjistili matematici. Pojetí chaotické dynamiky nejenže funguje, ale funguje ještě mnohem lépe, než mohl kdo doufat. Velmi subtilní jevy předpovězené spojitým modelem tekutin – o němž víme, že na úrovni atomů musí být *nesprávný* – přežijí aproximace prováděné při nahrazování moře atomů



Obrázek 79. Rösslerův atraktor.

nekonečně dělitelným kontinuem. Mohli bychom to asi snadno pustit z hlavy jako něco samozřejmého, ale obávám se, že to jsou jen plané naděje. *Rádi* bychom, aby to byla pravda – a, všem zkušenostem navzdory, to pravda je. „*Cokoli se může pokazit, pokazí se.*" Ale v tomto případě tohle slavné pravidlo neplatí. Skrývá se tu tajemství.

Ale není to tajemství, které bychom museli odhalit dřív, než ten úžasný zázrak, že to *funguje*, budeme moci nějak využít.

Ještě jednou Bašó

Tuto kapitolu jsem začal citátem Bašóa o poetickém zaujetí kapkami vody. Je příhodné skončit vyvoláním trochy jejich matematické krásy. Kapající kohoutek vyvolává obvykle spíš potřebu instalatéra než obdivné výkřiky, ale už jsme viděli, že na kapajícím kohoutku se dá vidět víc než voda tam, kde nemá být. Je to chaos v malém.

Chaotické kapání kohoutku je navíc diskrétní dynamický systém, který můžeme snadno pozorovat i analyzovat. Místo laseru stačí mikrofon.

Pojďme se na formování kapek podívat podrobněji.

Když vodu pustíme úplně maličko, kohoutek normálně kape v pravidelném rytmu. Voda se pomalu hromadí u obroučky kohoutku do kapky, která se vydouvá a nafukuje, až už ji povrchové napětí proti působení gravitace nemůže udržet. Začne se po stranách stahovat, utvoří zužující se krček, načež se kapka oddělí a proces začne znovu od začátku. Jen stěží někoho překvapí, že kapky kapou opakovaně a rytmicky.

Když ale voda pustíme o trochu víc, může se stát něco komplikovanějšího. Když se kapka tvoří, zároveň také osciluje. Nedostane šanci usadit se do rovnoměrného, pomalu rostoucího stádia. Výsledkem je, že okamžik, kdy přesně se kapka oddělí, nezáleží jen na množství nahromaděné vody, ale také na tom, jak rychle se při svém kmitání pohybuje. Tehdy se kapky mohou tvořit v nepravidelných, neperiodických intervalech.

Je tu jasná analogie. Tekutina teče při malé rychlosti hladce, ale při vyšší rychlosti přejde k turbulencím. Při nízké rychlosti se kapky tvoří pravidelně, při vyšší začnou být nepravidelné. Mohl by oba jevy ovládat stejný matematický mechanismus?

Nemusel by. Možná, že když tok začne být nepravidelný, je to kvůli tomu, že náhodné vlivy jako například vzdušné proudy mají vliv na formování kapek. I na to má Bašó příklad:

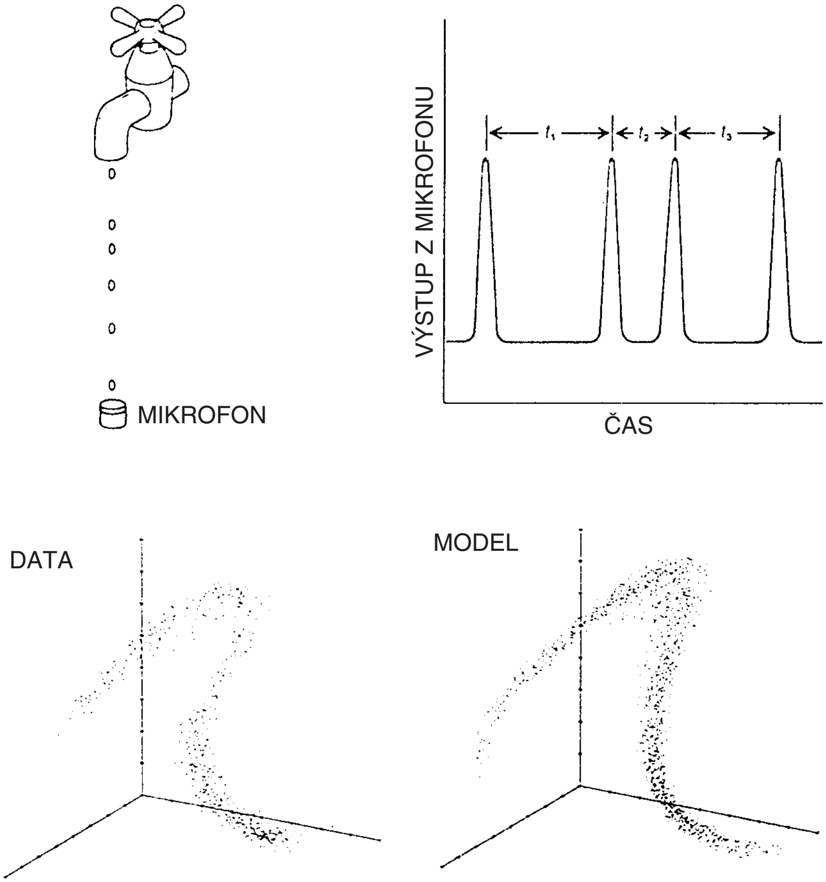
Večer, když vítr vál,
s větvemi stromu bašó si hrál.
Déšť, co do mísy propadal,
já jsem poslouchal.

(Strom bašó je druh banánovníku a básník měl jeden takový strom, který rostl před jeho domem, natolik rád, že si jej zvolil za své tvůrčí jméno.) Tentokrát je za jakoukoli nepravidelnost zodpovědný náhodný pohyb listů, nikoliv jemná dynamika tvorby jediné kapky.

Deterministický chaos? Náhodnost?

Robert Shaw, Packard a jejich kolegové z University of California v Santa Cruz to ověřili pokusem. Nechali kohoutek kapat na mikrofon. Signál z mikrofonu nahráli, aby každá padající kapka vytvořila dobře definované cvaknutí.

Cvaknutí potlačí většinu podrobností o dynamice. Neukazují, jak kapka narůstá, jen okamžik, kdy se oddělí. Jsou jako seriál diskrétních snímků dynamiky. Tvoří vlastně něco dost podobného Poincarého zobrazení, což je také seriál snímků. Z matematického hlediska se s nimi dá zacházet stejně.



Obrázek 080. Experiment s kapajícím kohoutkem: *(vlevo nahoře)* aparatura, *(vpravo nahoře)* úsek časové řady, *(vlevo dole)* třídimenzionální zákres pozorovaných hodnot, *(vpravo dole)* jednoduchý matematický model.

Na odvození dynamiky museli matematici ze Santa Cruz experimentální data zpracovat. Změřili časové intervaly mezi jednotlivými cvaknutími a dostali tak časovou řadu intervalů o zhruba 5000 členech. Potom, jak je popsáno výše, použili Takensovu metodu rekonstrukce. Posunutím původní časové řady o jedno a o dvě místa vytvořili dvě další, „falešné“ časové řady a za pomoci počítače nakreslili výsledných 5000 trojic.

Tak byli schopni zrekonstruovat topologii atraktoru dynamiky kapajícího kohoutku (obrázek 80). Jak oznámili ve vydání *Scientific American* z prosince 1986:

> Vzrušujícím výsledkem experimentu byla skutečnost, že v neperiodickém režimu kapajícího kohoutku byly skutečně odhaleny chaotické atraktory. Náhodnost kapek by také mohla být způsobena vlivy, které jsme nezaregistrovali, jako například malými vibracemi a vzdušnými proudy, ale v tom případě by mezi po sobě jdoucími intervaly nebyl žádný zvláštní vztah a zákres dat by tvořil pouze beztvarou skvrnu. Skutečnost, že se nějaká struktura v zákresu pozorovat dá, znamená, že náhodnost má deterministický podklad. Mnohé z datových souborů vykazují podkovovitý tvar, který je charakteristický pro jednoduchý proces natahování a skládání.

Zodpovědnost opravdu nese podivný atraktor. Data připomínají atraktor podobný Hénonovu.

Při vyšším průtoku začne být experimentální atraktor velmi komplikovaný a jeho struktura stále není pochopena. Není známa ani žádná přímá souvislost mezi tímto empirickým modelem a fyzikou utváření kapek. Ještě zbývá spousta práce.

Čůrek z kohoutku je jen jedním z druhů turbulence, a to spíš speciálním, ale chaos byl dále objeven v mnoha dalších turbulentních tocích. V roce 1989 se Tom Mullin z Oxfordské univerzity dostal na titulní stránku časopisu *Nature* s krásným experimentem, při němž pozoroval podivný atraktor v turbulentním Taylorově-Couetteově proudění. Při tomto konkrétním pokusu byl použit krátký válec a pro docílení silného rotačního urychlení toku se koncové destičky nechaly rotovat spolu s vnitřním válcem. Aparaturu bylo třeba udržovat v konstantní teplotě a v prostředí bez vibrací, jinak by byl jemný podpis chaosu setřen. Nalezení chaosu není snadné. Už teoretická počítačová analýza, kterou Mullin provedl ve spolupráci s Andrewem Cliffem v AERE Harwell pomocí numerického softwaru ENTWIFE, naznačovala vysokou pravděpodobnost, že tento systém bude generovat chaos. Experimentální data byla zrekonstruována Ruelleovou-Takensovou metodou a vyskočil pěkně úhledný podivný atraktor. Byl to dokonce jeden z těch, které matematici už znali: vyskytl se už dříve v jistých rovnicích, které odvodil Bill Langford z Guelphu v souvislosti s takzvanou Silnikovovou bifurkací, což je standardní trasa k chaosu. Takže při této příležitosti experimentální rekonstrukce chaotického atraktoru vedla k novým informacím o matematických vlastnostech proudění tekutin a dokonce i nabídla vodítka ke zjištění, co chaos způsobuje.

Skutečnost, že chaotická dynamika podivných atraktorů je zodpovědná za alespoň *některé* turbulentní jevy, je tedy pevně ustanovena, ale spousta věcí týkajících se turbulencí zůstává záhadou. Plně rozvinutá turbulence, pokud se jí podivné atraktory vůbec týkají, může vyžadovat atraktor enormní dimenze – tisíc, milion. O takových se v současnosti nedá říci nic, co by stálo za to vědět. Mnohé turbulentní jevy zřejmě vznikají kvůli rozhraním – například stěnám trubek – a teorii podivných atraktorů se zatím nepodařilo s vlivem rozhraní propojit.

A neměli bychom být posedlí chaosem jako jediným možným vysvětlením. Ruský fyzik V. P. Maslov nedávno objevil důkaz jistého druhu nejednoznačnosti v Navierových-Stokesových rovnicích. Rovnice ve skutečnosti nemusejí určit tok do všech detailů: pro dané počáteční podmínky mohou mít víc řešení, přinejmenším v jistém přibližném smyslu. Maslov říká, že efekt „se dá popsat obrazně. V Puškinově slavné pohádce *Pohádka o popovi a jeho dělníku Baldovi*, Balda provazem zamíchá vodu a vzbudí démony. Když tedy točí provazem dost rychle, démoni začnou nedeterministicky běsnit a zapříčiní turbulence."

Možná, že teorie s neviditelnými příšerami nakonec není zas až tak hloupá.

KAPITOLA DESÁTÁ

FÍKOVNÍKY A FEIGENBAUMOVA ČÍSLA

Blázen nevidí stejný strom jako moudrý muž.

William Blake, *Pekelná přísloví*

Nový matematický pojem: chaos. Starý problém: turbulence. Nový nástroj, starý úkol: co by mohlo být přirozenějšího než nový nástroj uchopit a vyzkoušet, jestli se bude na starý úkol hodit? A tak to udělali a hodil se.

Ale věda se nepohybuje vždy směrem, který byste nejvíc čekali. Ač se stádo úprkem žene ke vzdáleným obzorům, vždy se najde pár svéhlavců neústupně mířících opačným směrem. Jeden z těchto svéhlavců způsobil zásadní zlom. Jednalo se ale o průlom pouze matematický, který pro teorii turbulencí znamenal velký přínos až později. Do matematiky importoval nový nápad z fyziky fázových přechodů – účinnou techniku zvanou *renormalizace*. Tím se zase prokázalo, že některé vlastnosti chaosu jsou *obecné* – nezávisí na přesném tvaru rovnic, jen na typu podivného atraktoru, který se v nich vyskytuje. To umožnilo přítomnost jistých typů chaosu ověřovat jednoduchými pokusy. Ale abychom se k tomu všemu – poněkud nepřímo – dostali, chci se vrátit k jednomu z předchozích témat, kosmické sondě *Voyager*.

Láhev v kosmickém oceánu

Velkolepá výprava *Voyagerů* Sluneční soustavou u Uranu neskončila. Stejně jako jejich předchůdci, sondy *Pioneer* budou pokračovat do mezihvězdného prostoru. Za 40 000 let se dostanou na vzdálenost jednoho světelného roku ke hvězdě AC +79 3888. Po miliony let budou proplouvat galaxií a setkávat se možná s jinými planetárními soustavami.

Pro nepravděpodobný případ, že na jedné z nich budou inteligentní živé bytosti, nesou s sebou *Voyagery* dvanáctipalcový pozlacený měděný disk – gramofonovou nahrávku (obrázek 81). V jejích drážkách je zakódováno 115 fotografií od schématu kontinentálního driftu po supermarket a spousta zvuků od „dobrý den“ v akkadštině po Beethovenovu pátou. „K zachycení sondy a přehrání desky může dojít jedině tehdy, pokud v mezihvězdném prostoru existuje pokročilá civilizace schopná výprav do vesmíru," říká Carl Sagan. „Ale vhození této láhve do kosmického oceánu vyjadřuje něco nadějeplného o životě na této planetě." Jsem na vážkách, jestli mám tohle konkrétní kosmické gesto považovat za povzbudivý projev nezkrušitelnosti lidského ducha, který zahřeje u srdce, nebezpečné vyzrazení našich vesmírných souřadnic potenciálnímu nepříteli nebo nesmyslný projev ješitnosti. Opravdu by mě zajímalo, co si s tímto pokladem počnou mimozemšťané, kteří jej najdou. Konkrétně fotografie Jane Goodallové a jejích šimpanzů by mohla navodit chybné představy. Ale teď už se to nedá vzít zpět.

Třetí fotografie z nahrávky na *Voyageru* obsahuje matematické definice. Tradičně se má za to, že s mimozemšťany se dá kontakt navázat nejlépe přes matematiku – zřejmě proto, že vypadá jako univerzální médium myšlení. Už Carl Friedrich Gauss navrhoval nakreslit na Saharu diagram ilustrující Pythagorovu větu, aby jej Marťani a jim podobní mohli spatřit dalekohledy. Jiní navrhovali vysílání posloupnosti prvočísel nebo desetinného rozvoje π s předpokladem, že je žádný civilizovaný a inteligentní rod nemůže nepoznat, tudíž ani nemůže nepostřehnout civilizovanost a inteligenci bytostí, které je vysílají.

Mám ale podezření, že takové projekty selžou na provinčnost. *Myslím* si, že pro pozemskou matematiku π pravděpodobně zůstane důležité – ale moc bych nesázel na jeho setrvání v roli objektu zásadní důležitosti po dalších 10 000 let, natož milion. Nemám tušení, co zelenochapadélkovití matematoidi z Velkého Magellanova mračna považují za základní poznatky. Ve scifi povídce Jamese Blishe *A Clash of Cymbals* (*Třísknutí činelů*) matematika na řiditelné planetě He na pohled připomíná pozemskou matematiku, ale naráží se na úskalí: „Tady například Retma používal *d*, které měl Amalfi z analýzy zažité jako přírůstek, jednoduše jako označení konstanty." Tak pozor!

Řekněme, že by v létě 1975 nějaký astronom zaznamenal cosi, co by mohlo, ale nemuselo být přirozeného původu, stále se opakující posloupnost binárních signálů, která po převodu do desítkové soustavy reprezentuje číslo 4,669 201 609... Vědecká veřejnost by vyslovila jisté zklamání, že signál nevyjadřuje 3,141 592 653..., protože potom by pro argumenty, že π je pouhou shodou okolností, byla potřeba opravdu velká představivost. Ale nemohlo by to být nějaké jiné číslo zásadního významu? Vědci by prošli své tabulky základních matematických konstant, jako jsou třeba základ přirozeného logaritmu *e*, zlatý řez, Eulerova-Mascheroniho konstanta a odmocnina ze dvou – nic. Se vzrůstajícím zklamáním by vyhrabali nějaká méně známá čísla, jako je

Obrázek 81. Technici nakládající gramofonovou nahrávku na *Voyager 2*.

Catalanova konstanta nebo objem nejmenší hyperbolické třídimenzionální variety...

Ne, na 4,669 201 609 není nic pozoruhodného. Astronomové museli zachytit přírodní zdroj, periodické vibrace nějaké vzdálené neutronové hvězdy, radiaci z černé díry.

Kdyby ale tentýž signál zachytili v roce 1976...

Neperturbujte – renormalizujte!

Mitchell Feigenbaum je fyzik, který počátkem sedmdesátých let pracoval v losalamoské laboratoři. Někteří z jeho kolegů by měli výhrady vůči slovu pracoval, protože nikdo moc netušil, *na čem* Feigenbaum pracoval, včetně samotného Feigenbauma.

Zajímal se o nelineární systémy. Nejužívanějšími metodami pro práci s nelineárními systémy tehdy byly poruchové techniky částicové fyziky, a to hlavně Feynmanovy diagramy pojmenované po svém vynálezci, nositeli Nobelovy ceny Richardu Feynmanovi. Jako student se Feigenbaum naučil tyto výpočty provádět, usoudil, že se na nelinearitu nehodí, a přestaly ho bavit.

Jiné odvětví fyziky se zabývá *fázovými přechody* – změnami stavu hmoty, jako je například proměna kapaliny na plyn. Matematika fázových přechodů je také nelineární. Když Kenneth Wilson z Cornellu přišel na novou metodu pro fázové přechody zvanou *renormalizace*, Feigenbaum se do ní zamiloval. Wilsonův postup je založený na soběpodobnosti, tendenci matematických struktur opakovaně se vyskytovat na mnoha úrovních. Klasický obrázek turbulence má přece právě takovou strukturu: nekonečná kaskáda stále se zmenšujících vírů. Jak napsal Lewis Richardson v parodii Johnatana Swifta:

> Velkým vírům malé víry
> žerou jejich rychlost,
> malým vírům menší víry,
> nakonec je vazkost.

Feigenbaum nebyl jediný, kdo si myslel, že by Wilsonova renormalizace mohla být použitelná na turbulence. Vznik turbulence vypadá z matematického i z fyzikálního hlediska zrovna jako fázový přechod, jediným rozdílem je, že turbulence je přechod stavu proudění spíš než fyzické struktury hmoty. A tak na té myšlence pracovalo několik fyziků. Důvody, proč by renormalizace měla jít použít, byly nicméně chabé, a i kdyby použít šla, stejně nikdo neviděl jak.

Jako každý jiný rozumný vědec se ani Feigenbaum nepokoušel vylámat si zuby na plné složitosti turbulentního proudění. Místo toho, stejně jako Smale, uvažoval, jaký obecný jev v nelineárních diferenciálních rovnicích by mohl turbulenci odpovídat. Usoudil, že v učebnicích nic moc užitečného není: musel se do toho pustit holýma rukama. Takže začal s nejjednodušší nelineární rovnicí, která ho napadla, naším starým známým logistickým zobrazením.

Logistické zobrazení už zkoumali mnozí. Ekolog Robert May na něm pracoval v roce 1971 a demonstroval na něm podivnou povahu nelineárních populačních modelů. V tomtéž roce Nicholas Metropolis, Paul Stein a Myron Stein objevili, že věc je ještě složitější, než kdo tušil, a proto před ním Paul Stein Feigenbauma varoval, a ten problém na nějaký čas uklidil do šuplíku. Pokud je *nejjednodušší* zobrazení prakticky nesrozumitelné, jaká naděje zbývá pro *reálnou* dynamiku?

V roce 1976 se ale Feigenbaum zúčastnil konference, na které slyšel o dynamických systémech mluvit Smalea. Zmínil se o logistickém zobrazení a jeho kaskádě dvojnásobných period k chaosu a nadhodil možnost, že něco opravdu matematicky zajímavého by se mohlo dít na místě, kde se všechna zdvojování period nakupila, tam, kde kaskáda skončila a začal chaos. Feigenbaum se nechal znovu inspirovat, vytáhl problém ze šuplíku a vrhl se na něj.

Jak je dobré nemít počítač

Asi si pamatujete, že logistické zobrazení má tvar

$$x \to kx(1 - x),$$

kde x leží mezi 0 a 1 a k je parametr mezi 0 a 4. Z mnoha jeho vlastností nás bude zajímat kaskáda dvojnásobných period, kterou jsem na Feigenbaumovu počest překřtil na *fíkovník*.

Už jsme si ukázali, že fíkovníky rostou, když se hodnota parametru k zvyšuje z 3 na 3,58. Pro k mezi 0 a 3 je jeden klidový stav, pro $k = 3$ se objeví cyklus s periodou 2, v $k = 3{,}5$ se perioda změní na 4, v $k = 3{,}56$ se znovu zdvojnásobí a tak dále. Postupná dvojnásobení se kupí rychleji a rychleji a obrázek, jak se atraktor v závislosti na k mění, vypadá jako strom s nekonečně mnoha kratšími a kratšími větvemi, větévkami, větvičkami, výhonky..., které se v každé fázi rozdvojují. Smale se zajímal o to, co se stane na úplném konci nejvrchnějších větévčiček fíkovníku, když je k zhruba 3,57, a Feigenbaum se pustil do hledání odpovědi.

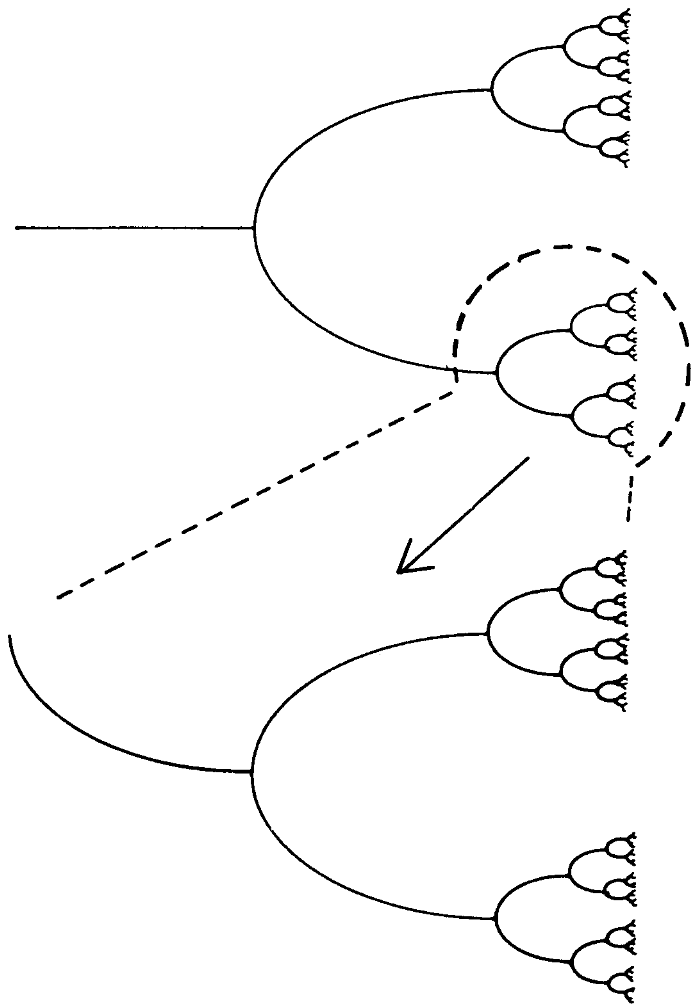
Jeho první krok byl rutinní: přesně spočítat posloupnosti hodnot parametru *k*, při kterých dochází k jednotlivým zdvojením. Dnes by člověk automaticky sáhl po svém počítači. Tehdy bylo používání počítače zdlouhavé, úlohy se zadávaly v dávkách na děrných štítcích a výsledky se objevily o celé dny později. Když člověk udělal jakoukoli chybičku, nedostal nic víc než jediný list papíru, při troše štěstí s lakonickou chybovou hláškou. Tak Feigenbaum raději použil programovatelnou kalkulačku HP 65 od firmy Hewlett-Packard.

To se ukázalo jako velice šťastný nápad, protože kalkulačka byla tak pomalá, že její operátor měl čas o výsledcích přemýšlet, když se objevovaly, a dokonce i *předtím*. Výpočet začal aproximací hledaného čísla, kterou pak krok po kroku vylepšoval. Čím lepší počáteční aproximace, tím kratší dobu výpočet trval. Takže na ušetření času – na to je při používání kalkulačky důležité myslet – se Feigenbaum snažil zhruba odhadnout, které další číslo by v kaskádě mohlo být. Brzy našel pravidlo. Rozdíly mezi po sobě jdoucími čísly měly konstantní poměr, každý zhruba čtyřikrát větší než ten další. Přesněji, poměr byl přibližně 4,669.

Matematik by to nazval *geometrická konvergence* a pravděpodobně by se tím dál nezabýval, ale pro fyzika, obzvlášť se znalostí fázových přechodů, konstantní poměr znamená *škálování*. Fyzikální jevy, které se znovu objevují v menším a menším měřítku. Malé vírečky v rámci velkých vírů – jako turbulence. V dané struktuře musejí být menší kopie téže struktury, jejichž měřítko je určené škálovacím poměrem.

Feigenbaum objevil důkazy, že v nejvrchnějších konečcích fíkovníku musí být nějaká struktura, která zůstává stejná, když se její velikost 4,669-násobně zmenší. Tato struktura je *podoba fíkovníku samotného*. Klidový atraktor tvoří kmen, atraktory pro periodu 2 jsou dvě kratší hlavní větve, z těch vyrůstají ještě o něco kratší větve pro periodu 4, z nich větvičky periody 8, slabší větvičky pro periodu 16 a tak dále. Poměry velikostí kmenu ke hlavním větvím, hlavních větví k dalším větvím, větví k větvičkám, větviček k větévečkám se stále víc přibližuje k 4,669, tak jak jsou větvičky blíž k vrcholu stromu.

Opravdu, když se ulomí větev, dostane se přibližná kopie celého fíkovníku (obrázek 82). Totéž platí, když se ulomí větvička. Kopie je menší a velikost se zmenšuje v měřítku, které se blíží 4,669. A čím se jde dál, tím je podobnost přesnější. To je *soběpodobnost.* Tady je potřeba aplikovat Wilsonovu metodu renormalizace. Feigenbaum pořád ještě neviděl, jak to udělat, ale věděl, že se vydal správným směrem.

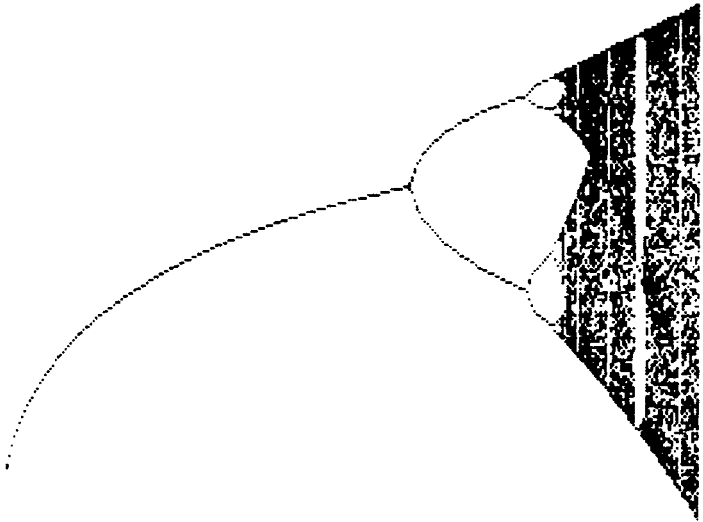


Obrázek 82. Soběpodobnost fíkovníku: v ideálním případě má každá větvička tentýž tvar jako celek, jen zmenšený.

Hadi a medvědi

Metropolis, Stein a Stein v logistickém zobrazení objevili netušené struktury a tytéž struktury objevili ještě přinejmenším v jednom dalším zobrazení, *trigonometrickém zobrazení*

$$x \to k \sin x.$$



Obrázek 83. Trigovník: kaskáda dvojnásobných period v trigonometrickém zobrazení (srovnej s obrázkem 65).

Tím se nechal Feigenbaum inspirovat a zopakoval své výpočty pro trigonometrické zobrazení. Opět našel kaskádu zdvojnásobujících se period (obrázek 83). Opět se jednalo o geometrickou konvergenci a poměr velikostí větví fíkovníku konvergoval ke konstantě.

To nebylo příliš překvapivé, konec konců v číslech musí být *nějaká* struktura a musejí se zmenšovat dostatečně rychle, aby se na omezený prostor dalo nacpat nekonečně mnoho větviček. Konstantní zmenšování je pravděpodobně nejjednodušší způsob, jak to docílit.

Ale přece jenom tam *bylo* překvapení. *Hodnota* škálovacího poměru.

Bylo to zase 4,669.

To bylo opravdu udivující. Nebyl patrný žádný důvod, proč by pro ta dvě zobrazení s úplně jiným předpisem mělo vyjít stejné číslo. Ale kalkulačka tvrdila, že vychází.

Možná to byla jenom náhoda. Možná se čísla liší na dalším desetinném místě. Nejjednodušší způsob, jak to rozhodnout, je spočítat to přesněji – a Feigenbaum měl pocit, že *teď* nadešel čas naučit se používat počítač. „Nejdřív myslet, pak počítat." To je heslo, které by mělo být vyryté na počítačovém terminálu každého vědce.

Feigenbaum rychle zjistil škálovací poměr pro logistické zobrazení přesněji: 4,669 201 609 0.

Zopakoval výpočet pro trigonometrické zobrazení. Čísla zůstala na deset desetinných míst stejná.

To nemůže být náhoda. Ale proč to tak proboha je? James Gleick ve své knize *Chaos* nabízí analogii, která pěkně zachycuje, jak byl Feigenbaum zmatený:

> Představte si, že nějaký prehistorický zoolog rozhoduje, že některé věci jsou těžší než jiné – mají nějakou abstraktní vlastnost, kterou nazývá váha – a on chce tento pojem vědecky analyzovat. Nikdy žádnou váhu neměřil, ale myslí si, že pojmu trochu rozumí. Podívá se na velké hady a na malé hady, velké medvědy a malé medvědy a odhadne, že váha by mohla být v nějakém vztahu k jejich velikosti. Vybuduje váhu a začne vážit hady. K jeho překvapení všichni hadi váží stejně. K jeho úžasu i všichni medvědi váží stejně. A k jeho dalšímu údivu medvědi váží stejně jako hadi. Všichni váží 4,669 201 609 0. *Váha* zjevně není to, co si myslel.

Byla to opravdu záhada. Ale teď Feigenbaum zahlédl strukturu, za kterou se honil a sledoval horkou stopu.

Byla to nicméně jiná cesta, než čekal.

Z tradičního pohledu fyziky a aplikované matematiky je tou nejdůležitější věcí na světě rovnice, která popisuje zkoumaný systém. Při studiu proudění vody v lázni *sepište rovnice*. Pak můžeme vodu vypustit a soustředit se na matematiku. Stejně jako z dítěte vyroste dospělý člověk, z rovnic vyroste všechno, co si jen budete přát.

Feigenbaum tento časem prověřený postup dodržel a vodu vypustil. Vypustil s ní očividně ale i dítě. *Škálovací poměr nezávisel na rovnici.* Logistické nebo trigonometrické, *nebyl v tom žádný rozdíl*.

Našel strukturu, dobrá.

Ale nedávalo to vůbec žádný smysl.

Renormalizace

Renormalizace byla prověřená technika, takže se nabízelo mnoho cest, kudy se do problému pustit. Feigenbaum je vyzkoušel všechny. Neformálně zveřejňoval své výsledky a mluvil se spoustou lidí. Postupně se matematické šero začínalo projasňovat. V době, kdy byl připraven své nápady publikovat, měl už v podstatě úplný obrázek toho, co se děje. Skutečně za tím vším byla Wilsonova metoda renormalizace, jak odhadl hned na začátku: možná ne přesně ve své obvyklé technické podobě, ale v základní filozofii. Feigenbaum napsal dvě pojednání, v jednom popsal příslušné matematické jevy, a ve druhém nastínil důvody, proč mají různá zobrazení stejné škálovací poměr. V jeho odůvodnění pořád ještě chyběl formální důkaz, ale bylo to přesvědčivé a vysvětlovalo to, že zázrak nebyl vůbec zázrakem, ale logickým vyústěním matematické struktury. Poslední dílek skládanky dodali Pierre Collet, Jean-Pierre Eckmann a Oscar Lanford, kteří důkaz správnosti Feigenbaumova scénáře vymysleli.

Základní myšlenka je skutečně nádherná. Pokusím se ji popsat, ale musím vás varovat, že se vám dostane jen maličký zlomek celku a lecčemu budete muset prostě uvěřit.

Začnu přirovnáním, ze kterého by mohlo být trochu vidět, jak renormalizace funguje. Připomeňme, že proces nebo objekt je soběpodobný tehdy, když se zvětšením jeho malé části dostane něco, co velice připomíná původní celek. Jako okénka v logistickém zobrazení. Nebo to, jak se v turbulentním proudění dají malé vírečky nafouknout do velkých vírů. I zde existuje škálovací poměr – jak moc je potřeba zvětšovat.

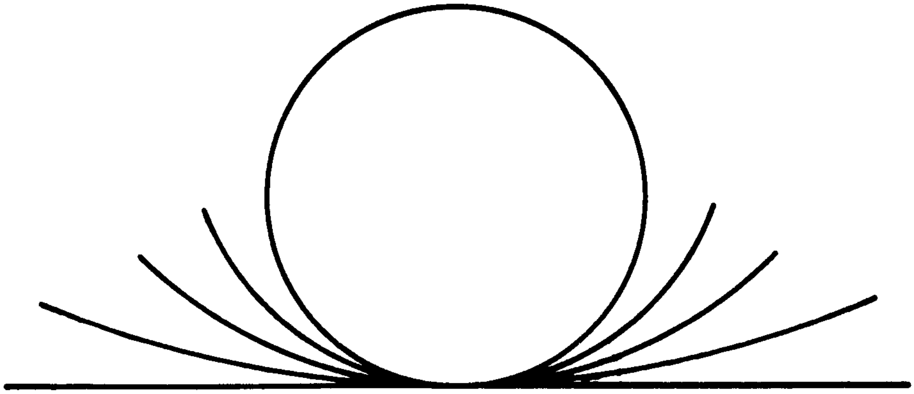
Když vybíráme stále menší části, a ty zvětšujeme na původní velikost celku, může se obrázek *stabilizovat* ve smyslu, že při stále větším zvětšení obrázky vypadají téměř totožně. Takže můžeme přejít k limitě a skončit s jakýmsi omezeně velkým obrázkem infinitezimální geometrie. Tomuto procesu se říká *renormalizace* systému. Jeho výhoda spočívá v tom, že v renormalizované verzi soběpodobnost není jen přibližná, ale přesná. A jakoukoli vlastnost originálu závislou jen na této infinitezimální geometrii potom můžeme vyčíst rovnou z konečné geometrie renormalizovaného objektu.

Takže renormalizace je matematický trik, který slouží trochu jako mikroskop, který zvětšuje soběpodobnou strukturu, odbourává aproximace a odfiltrovává všechno ostatní.

Uvedu analogii, která zachycuje hlavní matematické vlastnosti: geometrii malého kousku velké kružnice. Kružnice má *přibližnou* soběpodobnost. Dostatečně malý kousek velké kružnice je lehce ohnutá hladká křivka. Když ji zvětšíme, její tvar se moc nezmění, zůstane to lehce ohnutá hladká křivka. Soběpodobnost ovšem není přesná. Když zvětšíme kousek kružnice, změní se její křivost, i když maličko.

Přímka je ale přesně soběpodobná: když vezmeme krátkou úsečku a zvětšíme, dostaneme přesnou reprodukci originálu.

Jak vypadá velká kružnice z pohledu mravence? Je přibližně rovná. Stejně tak velká sféra nám drobným lidoopům, kteří ji obýváme, připadá plochá. Jak



Obrázek 84. Renormalizace kružnice odhalí, že „infinitezimálně“ je to vlastně přímka.

by z pohledu nekonečně malého mravence vypadala nekonečně velká kružnice? Patrně *úplně* rovně. Ale se slovy „nekonečně“ se musí zacházet opatrně. Jak můžeme z takového výroku dostat formálně přesné tvrzení?

Pomocí renormalizace. K renormalizaci kružnice se vyberou menší a menší obloučky, všechny se nafouknou na stejnou délku a výsledky se porovnají. Dostane se posloupnost stále přímějších křivek, které se blíží k přímce jakožto *limitě* (obrázek 84). Tato limita zachycuje „infinitezimální“ plochost kružnice a převádí přibližnou soběpodobnost na přesnou soběpodobnost.

Přímka taktéž vykazuje jistou dávku univerzality. Když renormalizaci zopakujeme pro elipsu, skončíme zase u přímky. Totéž platí vlastně pro jakoukoli hladkou křivku. Ať začneme s kteroukoli hladkou křivkou, proces renormalizace ji promění v přímku. Přímka je jakýmsi „atraktorem“ procedury renormalizace.

Když ale renormalizaci provedeme na něčem, co má roh, tak, že roh vždycky zůstane ve výřezu, výsledkem budou dvě polopřímky, které svírají nějaký úhel. Přímka je tedy univerzální jen pro vhodnou třídu počátečních křivek, a to křivek hladkých.

Fyzici, kteří studovali fázové přechody, objevili podobný úkaz univerzality. Jisté fyzikální veličiny, známé jako kritické exponenty, nabývají obvykle bez ohledu na konkrétní matematický model stejných hodnot. Důvodem je to, že při renormalizaci vypadají různé modely stejně a kritické exponenty závisejí pouze na renormalizovaném modelu.

Feigenbaumovo zobrazení

Feigenbaum přišel na to, že by stejný trik mohl fungovat i pro fíkovníky. Škálovací poměr fíkovníků je analogií kritických exponentů, takže univerzalita pozorovaná při fázových přechodech musí být zodpovědná za to, že se ve fíkovníku objevuje vždy tentýž škálovací poměr bez ohledu na to, o které zobrazení se jedná.

Připomeňme, že fíkovník je nákres, který zachycuje postupné vznikání periodických cyklů s periodami délky 1,2,4,8,16,... při změnách parametru k. Podstata je v tom, že se periody prodlužují stále stejným mechanismem. Cyklus s periodou 2^n začne být nestabilní a vznikne cyklus s periodou 2^{n+1}. Děje se to tak, že se každý bod z cyklu s periodou 2^n rozdělí na dva. Když na cyklus s periodou 2^{n+1} zamžouráme z dálky hned po jeho vzniku, dvojice bodů splynou a místo toho bude vidět starý cyklus s periodou 2^n.

Jeden matematický trik umožňuje vybrat konkrétní bod z cyklu délky 2^n a sledovat, jak se bod rozdvojí. Matematickým mikroskopem se sleduje maličký kousek intervalu mezi 0 a 1. Kromě velikosti tohoto maličkého intervalu je geometrie při rozdělování téměř totožná. Kdyby se zorné pole matematického mikroskopu vyfotografovalo a zvětšilo na standardní velikost, lišily by se po sobě jdoucí snímky jednotlivých zdvojnásobení periody čím dál tím méně. Když se tedy délka periody blíží nekonečnu a docházíme na samý konec větví fíkovníku, po sobě jdoucí fotografie vypadají čím dál tím víc jako nějaký limitní obrázek.

Analogie s renormalizací je teď jasná. Z matematického hlediska se jedná o stejný postup. To znamená, že analogii můžeme rozvést a zeptat se, co je limitní obrázek a jakému zobrazení odpovídá.

Za prvé bychom mohli čekat, že podobný obrázek bude vyhovovat pro jakékoli původní zobrazení – logistické, trigonometrické, nebo kterékoli jiné s jediným hrbem. Klíčové pozorování je, že tvar limitního obrázku je ve všech těchto případech *stejný* – stejně jako z kružnic a elips renormalizací vznikne přímka.

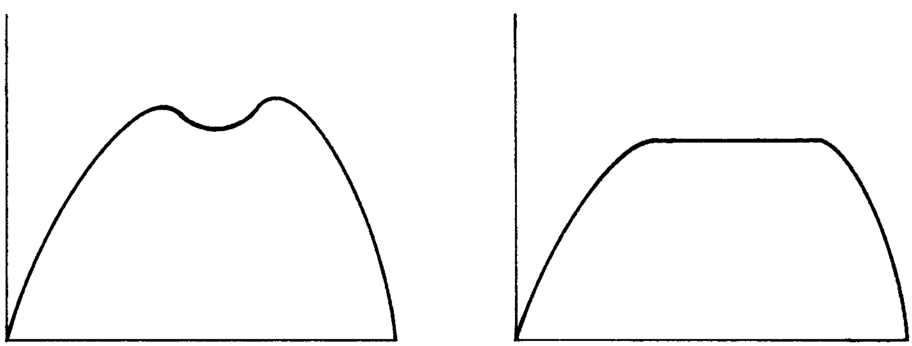
Při hledání zobrazení, které odpovídá univerzálnímu limitnímu obrázku, začneme pozorováním, že – v „kružnicové analogii“ – přímka má speciální vlastnost, díky které vyčnívá jako neobvyklá. Při renormalizaci zůstává stejná – přesně soběpodobná. Předpokládejme, že bychom našli nějaké velmi speciální zobrazení, pro které se fotografie zvětšované z mikroskopu neblíží k nějaké limitní formě, ale v každém kroku jsou přesně tytéž. Jeho bifurkačním diagramem by tedy byl prototyp z obrázku 82, který je *přesně* soběpodobný. Potom by toto mimořádné zobrazení mělo hrát roli analogickou té, kterou hraje přímka. Říkejme mu *Feigenbaumovo zobrazení*. Stejně jako přímka, zůstává po renormalizaci *nezměněné*. Feigenbaum tvrdil, že bez ohledu na to, s jakým zobrazením začneme, při renormalizaci dojdeme k tomuto speciálnímu zobrazení – stejně jako se libovolná hladká křivka promění v přímku.

Konstantní rychlost zmenšování po sobě jdoucích větévek fíkovníku pro Feigenbaumovo zobrazení vyplývá přímo z definice: jedná se o poměr, ve kterém je potřeba zvětšovat další fotografie, aby se získal tentýž obrázek. Ten se dá spočítat jednou provždy tak, že se zjistí, jak musí Feigenbaumovo zobrazení vypadat. *Dostaneme jen jediné číslo, protože je jen jedno Feigenbaumovo zobrazení*. Jak to tak vypadá, to číslo je 4,669 201 609 0. No, *něco* to být musí.

Pro jiná zobrazení jsou ovšem postupně zvětšované obrázky nejen stále přesnějšími kopiemi téhož, ale jsou stále podobnější obrázkům pro Feigenbaumovo zobrazení. Jejich fíkovníky se tedy scvrkávají rychlostí, která konverguje k míře pro Feigenbaumovo zobrazení. V limitě se tedy dojde k *témuž* poměru 4,669 201 609 0.

Z elips i z kružnic se při renormalizaci stane přímka, a tu můžeme charakterizovat pomocí soběpodobnosti. Stejně tak se z logistického i z trigonometrického zobrazení stane Feigenbaumovo zobrazení, které taktéž můžeme charakterizovat soběpodobností.

Feigenbaum měl promyšlenou představu o celém procesu. Je to dynamický systém, který ale místo čísel používá *zobrazení*. Je to diskrétní systém a v každém kroku se dané zobrazení transformuje na jiné pohledem do mikroskopu



Obrázek 85. Pro zobrazení s několika hrby nebo s plochým hrbem existují jiná Feigenbaumova čísla.

a zvětšením fotografie. Feigenbaumovo zobrazení je atraktorem tohoto systému, takže ty vlastnosti zobrazení, které jsou závislé pouze na pozdějších stádiích nafukovacího procesu, jsou velmi podobné vlastnostem Feigenbaumova zobrazení.

Konkrétně dostaneme jen jediné *číslo* 4,669 201 609 0, protože v tomto dynamickém systému je jen jeden *atraktor*. Feigenbaumovo magické číslo je, stejně jako π, základní a přirozená matematická konstanta. Pokud se zelenochapadélkovití matematoidi z Velkého Magellanova mračna hodně zabývají dynamikou, mohli by za prostředek k vyslání signálu zbytku inteligentního vesmíru považovat právě tohle.

Feigenbaumova čísla

Fyzici, kteří zkoumají fázové přechody, jsou na tento typ univerzality, kdy stejné číslo vychází pro různé matematické modely, zvyklí. Nepodařilo se jim dokázat, že je to tak vždycky, ale stejně se to naučili využívat. Pokud ze spousty modelů vyplývá stejná odpověď, je možné vybrat si ten, ve kterém je výpočet nejjednodušší.

V momentě, kdy se matematici postarali o technické detaily, byl Feigenbaum v mnohem lepší pozici. Mohl *dokázat*, že různá zobrazení mají vždycky stejný škálovací poměr. V rigorózní verzi jeho teorie se číslo 4,669 objevuje jako *vlastní číslo* operátoru. Vlastní čísla měří intenzitu natahování ve zvlášť vybraném směru. Fyzici nazývají 4,669 *Feigenbaumovo číslo*.

Univerzalita Feigenbaumova čísla není absolutní, ale relativní. Škálovací poměr je 4,669 pro všechna zobrazení s jedním hrbem, který připomíná parabolu. Pro zobrazení s několika hrby nebo zobrazení s hrbem znatelně jiného tvaru – například s rovným hrbem – je škálovací poměr jiný (obrázek 85). Ale potom existuje celá paleta dalších zobrazení, která mají toto nové číslo jako svůj škálovací poměr. Ohromně rozmanitá zobrazení se seskupí do tříd univerzality a v rámci každé třídy je škálovací poměr vždy stejný.

A ještě existuje další, podobně univerzální číslo spojené s dynamikou nelineárních zobrazení. Škálovací poměr 4,669 pro fíkovník je poměr délek jeho větví – nebo spíš jejich vodorovného stínu měřeného pomocí parametru *k*. Na obrázku fíkovníku je patrné, že se menší větvičky nerozevírají tak rychle jako ty větší. Míra, jak rychle se větve rozevírají, se také snižuje univerzální konstantou, ale jinou: tentokrát je to 2,502 907 875 095 7.

Dvousečný meč

Vyplývají z toho důležité, leč nezvyklé důsledky pro experimentální testování chaotických modelů. Ukazuje se, že v mnohých reálných systémech dochází k sérii zdvojnásobování period – s jedním takovým systémem se za okamžik setkáme. Přirozeným modelem je potom dynamický systém podle logistického zobrazení. Podle Feigenbaumových výsledků o univerzalitě můžeme pro experiment udělat dvě předpovědi. Poměr délek intervalů mezi po sobě jdoucími zdvojeními bude zhruba 4,669 a poměr, v němž se mění rozevření větví, by měl vyjít zhruba 2,502.

Otestování těchto předpovědí je naprosto přímočaré. Provedeme pozorování a spočítáme čísla. Teorie je tudíž falzifikovatelná: pokud je chybná, dostaneme místo toho například čísla 6,221 a 0,074. Byla by to skutečně pozoruhodná shoda náhod, kdyby vyšla čísla blízká Feigenbaumově předpovědi a teorie nebyla v podstatě správná.

Všimněte si, že z čistě kvalitativního modelu dostaneme kvantitativní, numerické předpovědi. Zázrak!

Ale zázrak není zadarmo. Tentýž fenomén, díky němuž je to možné, – univerzalita – také způsobuje, že není možné rozlišit mezi jednotlivými zobrazeními z téže třídy univerzality. Trigonometrické zobrazení projde stejnými experimentálními testy jako logistické zobrazení a stejně tak i spousta dalších zobrazení s jedním hrbem.

Za předpokladu, že z experimentu skutečně vyjdou přibližně čísla 4,669 a 2,502, jak se předpovídalo, můžeme si být celkem jistí, že chování se skutečně dá popsat pomocí diskrétního dynamického systému, který po fíkovníku šplhá k chaosu. *Který* systém to přesně je, to je zase jiný problém. Test funguje pro celou *třídu* rovnic, ne pro jednu konkrétní.

Tento proces se velmi liší od tradičního pohledu na experiment, kdy se předpovědi jediné specifické modelové rovnice porovnávají s realitou.

Další věc. Předpokládejme, že nevíme, že Feigenbaumovo číslo 4,669 je univerzální, a předpokládejme, že logistické zobrazení je jediné známé zobrazení s jedním hrbem. Po zopakování výpočtů, které Feigenbauma dovedly k jeho teorii, můžeme z této specifické rovnice odvodit číslo 4,669. Když jej pokusy potvrdí, budeme mít za to, že je to pádný důkaz ve prospěch modelování pomocí logistického zobrazení. Nikdo nezjistí, že přesně stejné číslo vyjde i z jiného modelu podobného typu.

Představte si například, že se v dalším životě v alternativním vesmíru narodíte jako Galileo. Vymyslíte teorii, že objekt hozený do vzduchu opisuje parabolu, spočítáte pár čísel, provedete pokus a vyjde dobrá shoda teorie s experimentem. Usoudíte z toho, vcelku rozumně, že parabola je správně. Nikdy vás ani nenapadne, že tatáž čísla by vyšla i pro spoustu jiných teorií, že parabola možná vůbec není potvrzená.

Feigenbaumův objev univerzality byl tedy dvousečným mečem. Díky němu se dá konkrétní třída chaotických modelů relativně snadno experimentálně otestovat, ale testovací metoda nedělá rozdíl mezi jednotlivými modely této třídy.

Jedním řešením by byly citlivější testy: řekněme zkoumání detailní struktury posloupností zdvojnásobování period místo studia chování pouze v blízkosti hromadného bodu na úplných konečcích větví fíkovníku.

Pro některé účely (třeba pro zkoumání, jak vypadá chování na úplných konečcích větví fíkovníku) by ale mohlo být řešením připustit, že rozdíly mezi různými modely nehrají roli. Nejen kvalitativně, ale ani kvantitativně. Pro některé účely bude *kterákoli teorie z téže třídy univerzality fungovat stejně*.

Turbulentní vzdušné zámky

Jak jsem řekl, Feigenbaum začal přemýšlením o turbulencích, tedy se zabýval i velice specifickou a komplikovanou soustavou rovnic proudění, Navierovými-Stokesovými rovnicemi. Místo zkoumání těchto rovnic pracoval se zjednodušenou, umělou rovnicí – logistickým zobrazením. Tak došel k nedocenitelnému objevu: univerzalitě. Nikdy by ji neobjevil ze složitých rovnic, i kdyby realitu vystihovaly lépe. Realismus je prevít.

Mezi matematické techniky na studium diferenciálních rovnic patří i rozsáhlý repertoár triků na převod jednoho problému na zdánlivě jiný. Jsou v něm substituce proměnných, které změní tvar rovnic, i když základní model zůstane zachován, a redukční metody, které spoustu proměnných z úvah úplně vyřadí. Je složité aplikovat je na Navierovy-Stokesovy rovnice, ale vždycky se dá o takové možnosti snít, aniž by člověk musel všechna úskalí skutečně překonávat.

Ale čekat, že pomocí nějakého typu matematické analýzy bude možné z Navierových-Stokesových rovnic odvodit opravdové logistické zobrazení, to je opravdu přehnané. Bez univerzality by analýza logistického zobrazení byla pouhým jediným příkladem, pravděpodobně necharakteristickým pro nic jiného: ojedinělý, bezvýznamný výpočet. Ale je mnohem pravděpodobnější, že se esence chaosu (natáhnout a složit) najde v turbulentních tocích. A *nejjednodušší* systémy, které předvádějí natahování a skládání, jsou kvalitativně podobné logistickému zobrazení. Pro všechny takové systémy vyjdou díky univerzalitě tatáž Feigenbaumova čísla.

Závěr: pokud je tomu tak, že hluboko v Navierových-Stokesových rovnicích je matematický proces zahrnující jednohrbé zobrazení, potom se tam vyskytne kaskáda dvojnásobných period se škálovacím poměrem 4,669. *Na takovou předpověď není potřeba zobrazení odvozovat.* Jen musíme odhadnout, že tam takové zobrazení někde bude. Je to předpověď se všemi výhodami krádeže nad poctivou prací.

Ale předpověď je naprosto v pořádku, ať už je její etický status jakýkoli: můžeme jít a provést pokus, zda se objeví číslo 4,669. A pokud ano, je to pádný důkaz toho, že chaotická dynamika, podivný atraktor a zobrazení s jedním hrbem skutečně někde v Navierových-Stokesových rovnicích jsou. Experimentální důkaz na podporu matematické věty!

Bizarní.

Když si to Feigenbaum takhle rozmyslel, navrhl nový přístup k turbulencím. Nikoli hromadění dalších nezávislých chvění, ke kterému se klonili Hopf a Landau. Nikoli jedno, dvě a ze tří už je chaos, jak navrhovali Ruelle a Takens. Místo toho řada zdvojnásobování period, která se dějí ve stále rychlejším sledu, lezení po fíkovníku, aby se z konečků jeho větví dalo natrhat ovoce chaosu.

Všechno to jsou spekulace. Mnoho lidí nechtělo přijmout skok od jednoduchého vykonstruovaného zobrazení ke starým dobrým parciálním diferenciálním rovnicím pro tekutiny. Ve Feigenbaumově teorii jim vadil i naprostý nedostatek fyzikálního kontextu. „Je to chaotický dynamický systém, ale nezáleží na tom který, a systém se nedá určit, ani kdyby experiment fungoval." Vyvolává to jisté rozpaky.

Ale Feigenbaumův skok nebyl spekulativní skok k nezaručeným závěrům. Byl to skok představivosti k naprosto zaručenému závěru. Mělo to větší šanci být správně, než si většina lidí byla ochotna připustit.

První doklad o tom, že by na této myšlence mohlo být víc, než je vidět na první pohled, přišel z počítačových kalkulací s realističtějšími rovnicemi proudění. Někdy se rovnice nechaly přesvědčit k předvedení kaskády dvojnásobných period. Když ji předvedly, bylo možné spočítat škálovací poměr. Pozoruhodně často se objevovala čísla okolo 4,669.

Chyběl skutečný pokus se skutečnou tekutinou, při kterém by stejná čísla vyšla také.

Dalším rozmarem osudu a tápáním ve tmě, které je tak charakteristické pro základní výzkum, bylo, že takový experiment už byl proveden. Ale ani Feigenbaum, ani experimentátoři, kteří už jeho teorii otestovali, nevěděli o tom, že jejich výsledky mají něco společného.

Zima a ticho

Kapalné helium je jedna z nejdivnějších substancí na zemi. Když jej zchladíme na teplotu blízkou absolutní nule, dokáže samo od sebe vylézt z kádinky a makroskopicky projevit kvantovou neurčitost. V kvantové teorii není nikdy úplně jasné, jestli kapalina v kádince skutečně je, a helium utíká touto kvantovou skulinou. Kapalné helium na ulici nenajdete, ale nikoli proto, že by uteklo, ale protože se musí vyrobit v laboratoři důmyslnými technikami vytvářejícími extrémně nízké teploty kolem −270 °C. Ale pro fyzika nízkých teplot Alberta Libchabera je kapalné helium starým známým. A stojí za celou tu dřinu spojenou s jeho výrobou, protože je naprosto ryzí a pokusy s ním jsou velice „čisté“.

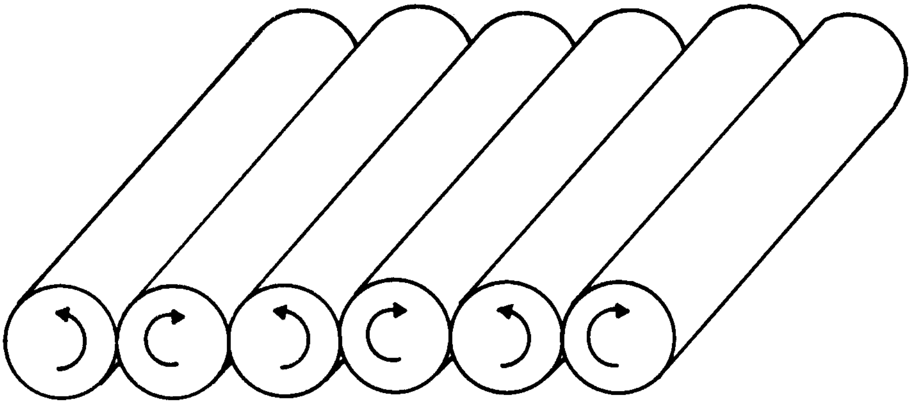
Při pokojové teplotě vykonávají atomy tekutiny náhodný tepelný pohyb. To, co vypadá jako nehybná kádinka s vodou, je v atomovém měřítku kypící oceán zmítaný vichřicí. Tyto termální jevy produkují „šum“ – ne v obvyklém smyslu, ale ve smyslu náhodných perturbací experimentálních dat. Když je potřeba dosáhnout přesnosti v atomovém měřítku, šumy kazí výsledky. Je to jako snaha poslouchat zpěv slavíka během večírku – signál je utopen v náhodném klábosení okolí.

Na odstranění šumu je potřeba utišit rušitele klidu, tedy zpomalit tepelný pohyb, jinými slovy snížit teplotu. Nejnižší možná teplota je −273 °C, absolutní nula. Při absolutní nule nejsou žádné termální šumy, zamrznou i atomy.

Ale s tekutinou, jejíž atomy jsou zmrzlé, se nedají dělat pokusy s prouděním tekutin. Je potřeba látka, která zůstane tekutá i při teplotách blízkých absolutní nule. Helium je v tomto ohledu jedinečné. Vyčleňuje se jako jediná látka, se kterou se tyto vysoce přesné pokusy dají provádět. Takže chtě nechtě, pokud si žádáte proudění plus vysokou přesnost, je z vás fyzik nízkých teplot a pracujete s kapalným heliem. Pokud vás moc nezajímají jevy kvantové, ale spíš ty klasické, helium je velice vhodné: když se zahřeje na příjemných −269 °C, chová se jako klasická tekutina.

Role helia

Stejně jako mnozí jiní badatelé ve fyzice a dynamice proudění se Libchaber v roce 1977 zajímal o konvekci. Věděl, že jiní experimentátoři jako například Swinney a Gollub vyslovili pochybnosti o Hopfově-Landauově teorii



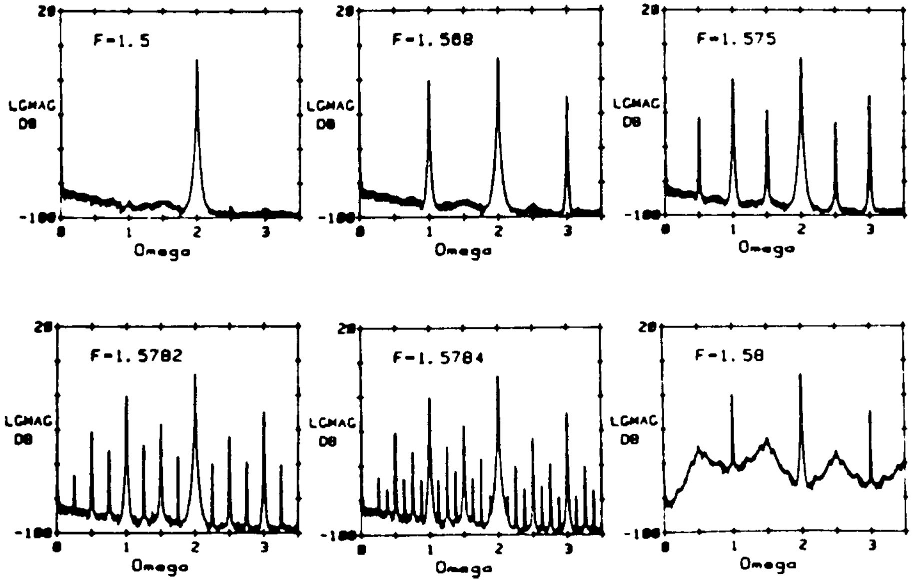
Obrázek 86. Paralelní role při konvekci tepla v kapalině: sousedící role rotují v opačných směrech.

nahromaděného chvění. Kdyby byl Libchaber malířem, maloval by miniatury, kdyby byl strojařem, vyráběl by švýcarské hodinky. Měl rád věci malé, úhledné a precizní, a právě tyto atributy ho na fyzice nízkých teplot lákaly především. Kde by jiní studovali proudění v třicetimetrovém větrném tunelu, Libchaber mohl strčit svou aparaturu do kapsy. A množství tekutiny, které nechal proudit, nebylo větší než zrnko písku.

Libchaber vyrobil přesnou maličkou nerezovou komůrku a naplnil ji kapalným heliem. Na několika vybraných místech teplotu kapaliny měřil pomocí drobounkých zařízeníček vyrobených ze safíru. Vešlo se tam tak jedno nebo dvě. Dno buňky zahřál na teplotu o zlomek stupně vyšší než vršek, čímž vznikla teplotní inverze, která nutila teplejší tekutinu stoupat vzhůru a chladnější klesat. V rámci své komůrky mohl Libchaber vytvořit konvekční proudění téměř bez šumu a měřit jeho chování.

Dávno předtím vymyslel velký fyzik lord Rayleigh, co se v takové buňce stane na začátku konvekce. Tekutina utvoří válcové role poskládané bok po boku jako kmeny pokácených stromů, které rotují vždy v opačném směru než role sousední (obrázek 86). Je to tentýž systém, který studoval i Lorenz, ale Libchaber místo přibližného matematického modelu pracoval se skutečným systémem.

Libchaberova buňka byla tak malá a tak přesně sestrojená, že tam bylo místo na právě dvě role. Když dno buňky lehce zahřál, role se začaly chvět a kroutit jako břišní tanečnice, přičemž spolu držely krok. To bylo opět ve shodě s klasickým očekáváním.



Obrázek 87. Experimentální důkaz fíkovníku v konvekci. Každá další sada hrotů se vyskytuje uprostřed mezi předchozími, což znamená zdvojnásobení periody. Je vidět posloupnost čtyř zdvojnásobení periody následované chaosem.

To, co se stalo dál, ale už ne. Objevily se další oscilace, ale narozdíl od Hopfova-Landauova chvění jejich perioda na stávajícím chvění nezávisela. Oscilovaly s periodou přesně dvakrát větší než perioda předchozí. A těsně nad touto teplotou se daly matně rozeznat periody čtyř-, osmi- a možná i šestnáctinásobné délky. Potom už uši rvoucí termální hluk atomů při −267 °C měření zahltil.

Libchaber tyto oscilace zachytil pomocí výkonových spekter (obrázek 87) vypočtených z pozorování. Připomeňme, že hroty ve spektrech odpovídají silným dílčím frekvencím. Při prohlížení posloupnosti obrázků je vidět nejprve jediný hrot, potom několik hrotů s malými rozestupy a tak dále. Rozestupy se v každém kroku zmenšují na polovinu, což znamená, že perioda – nepřímo úměrná frekvenci – se pokaždé zdvojnásobí. V posledním frekvenčním spektru je vidět široký pás frekvencí charakteristický pro chaos.

Libchaber objevil posloupnost dvojnásobících se period. Skutečný fíkovník. Byl to pro něj nový a zarážející jev.

V roce 1979 kontaktoval Feigenbauma, a tak zjistil, co jeho pozorování znamenají a co s nimi dělat. Feigenbaum z cylindru chaosu jako kouzelník vyčaroval králíka univerzality. Libchaberovi stačilo pouze spočítat škálovací poměr své posloupnosti zdvojnásobených period a ověřit, zda vyjde číslo blízké 4,669.

Vyšlo. Dost blízké na to, aby stálo za to udělat další a přesnější pokusy.

Během několika let Feigenbaumovu teorii do písmene potvrdily pokusy řady vědců z celého světa. Nejen pro turbulentní toky, ale pro všechny možné fyzikální soustavy: elektronické, optické a dokonce i biologické. Lidé, místa, kultura a nyní i čas byli zralí. Všechno do sebe zapadlo.

Chaos přestal být teorie, je to fakt.

Velká věda vyrůstá z malých fíkovníků.