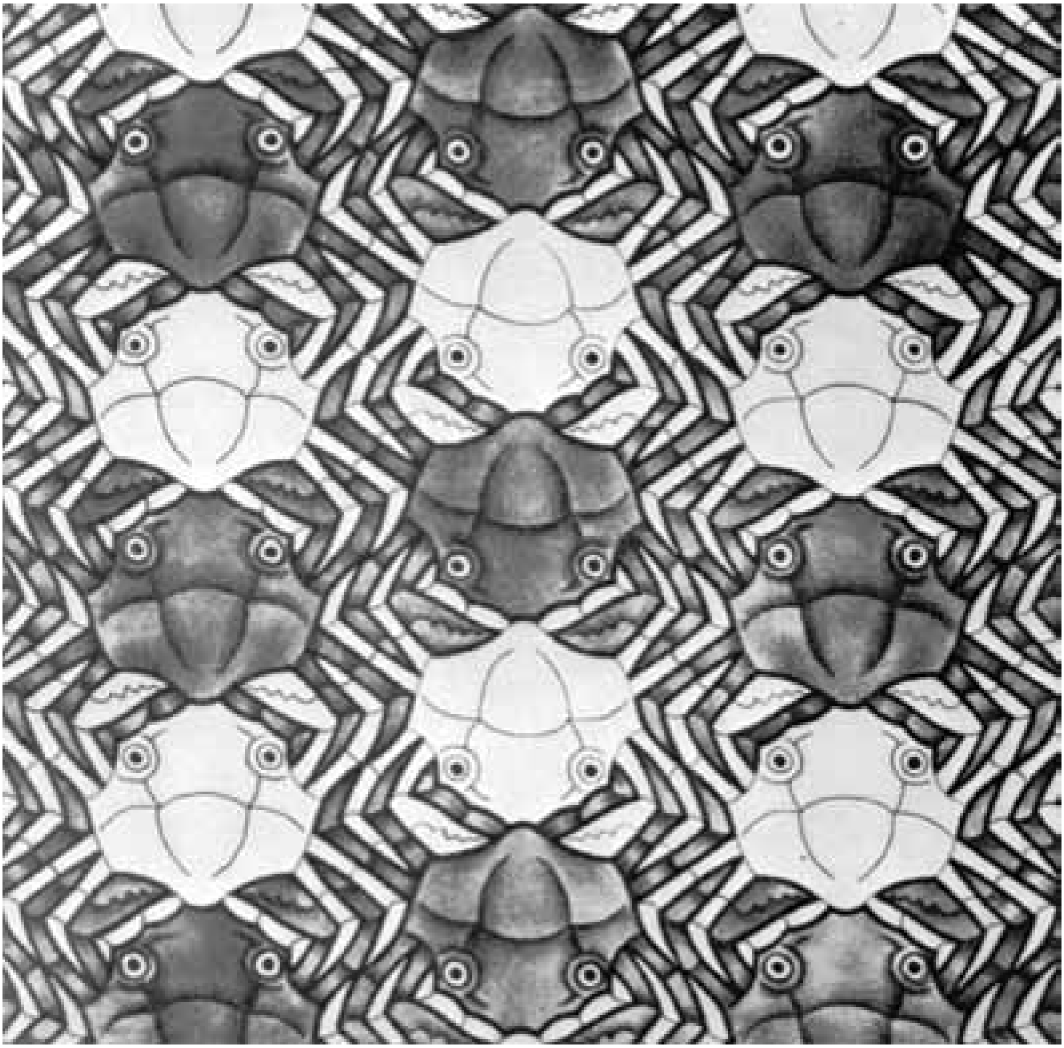


Obr. 42 Krabí kánon, M. C. Escher (okolo 1965).

```
*
* *
*
*
*
*
*
* *
* _ *
* ___ *
* ___ * ___ *
* ___ * ___ * ___ *
* ___ * ___ * ___ * ___ *
* ___ * ___ * ___ * ___ * ___ *
* ___ * ___ * ___ * ___ * ___ * ___ *
* ___ * ___ * ___ * ___ * ___ * ___ * ___ *
```

8. *Krabí kánon*

Achilles a Želva se náhodně potkali při procházce v parku.

Želva: Srdečně vás zdravím, pane A.

Achilles: I já vás, drahý příteli.

Želva: Mám takovou radost, že jsem vás potkal.

Achilles: Čtete mi myšlenky.

Želva: Skvělý nápad, vydat se na procházku! Nad to prostě není!

Achilles: Myslíte? Tak to se mi hned půjde domů veseleji. Vezmu to pěšky.

Želva: Mimochodem, vypadáte dnes mimořádně skvěle, to je třeba říci.

Achilles: Ó, tisíceré díky. Udělal jste mi obrovskou radost.

Želva: Ale jděte. Nedáte si doutníček?

Achilles: Neodolatelná myšlenka. Ale zrovna v tomhle oboru Holanďani moc vkusu nepředvedli, nezdá se vám?

Želva: V tomto bodě se neshodneme. Ale když mluvíme o vkusu, nedávno jsem v galerii konečně zhlédl ten *Krabí kánon* od vašeho oblíbence M. C. Eschera a musím vám říci, že mě úplně uchvátila jeho nádhera a duchaplnost, to překrásné tematické schéma, které ubíhá stejně dopředu i dozadu. Ale stejně si nemohu pomoci, pořád mi připadá Bach ještě o něco úžasnější než Escher.

Achilles: To je otázka filozofická. Ale jedna věc je jistá. Argumentace založená na osobním vkusu mi již nikterak nevadí. *De gustibus non est disputandum.*

Želva: Povězte mi, prosím, jaké to je, když je člověk tak starý jako vy? Je pravda, co se říká, tedy že člověk vašeho věku nemá žádné starosti?

Achilles: Šmytec. A taky jeden nemá takové ty směšné bariéry.

Želva: A v čem je to jiné?

Achilles: Teď hraju na kytaru.

Želva: Já myslel, že vy hrajete na čelo.

Achilles: Já ne, ale můj dobrý přítel. Ten hraje často, blázen. Já osobně bych si dal raději pozor, abych se čelofila nedotkl ani dvoumetrovým klackem.

(Náhle, kde se vzal, tu se vzal, objeví se Krab, energicky si to rázuje a všem ukřivděně ukazuje své zmodralé oko.)

Krab: Hola zdola! Kde jsou vaše kola? Máte se celkem dobře, nebo jen zpola? Vidíte tu ránu, co jsem dostal k ránu? Málem jsem byl v pánu. No jestli! A zrovna v tak krásný den. To byste nevěřili! Nenuceně si to flákám parkem, když tu se přede mnou vztyčí s tyčí ten kolohnát z Helsinek – medvěd tlustší než Franta Nedvěd – a co nedělá, jako že hraje na čelo. Padneme do jetelíčka, zahrajem si metalíčka! Na vejšku měl dobrejch deset stop, to když se budu držet hodně při zemi. No co, já se hned tak něčeho neleknu, krab není srab, vyrazím rovně na férovku proti chlapovi, vytáhnu se k nebesům, a fakt se mi podařilo klepnout ho klepetem do kolena, a povídám: „Hele, sorry, šéfe, ale trochu jste tady těma svejma hořkosladkejma apokalyptickejma ságama zasfinil parčík." No ale to by jeden nevěřil! Chlap vůbec nemá smysl pro humor, neocení moji slovní hříčku, a rovnou řach! Napálil mi hned jednu přímo do voka! Kdyby to bylo zapsáno v povaze mého rodu, tak byste koukali, hošánkové, do jakýho modrobílýho křížku bych se s ním pustil. Avšak v souladu s tím, co je psáno v genech (a léty prověřená tradice ukazuje, že se to mýmu rodu dost vyplácí), radši jsem z toho vycouval. Koneckonců, my když mažeme dozadu, tak vlastně jdeme dopředu. Ne snad? Prostě to mám v genech. Pořád to točím tam a zpátky. Což mi připomíná, co tu vlastně bylo první, krab, nebo gen? Nad tím mi zůstává rozum stát už hezky dlouho. Jinými slovy, co tu vlastně bylo poslední, gen, nebo krab? Pořád to točím tam a zpátky. Prostě to mám v genech. Snadné. Koneckonců, my když jdeme dopředu, tak vlastně mažeme dozadu. Tak končí můj kus. Tož čus! Je čas dát se v klus! Ať vám neujede bus! A zrovna v tak krásný den. No jestli! Věnujte vzpomínku nebohému krabu! Já na vás dlabu! S písní na rtech vpřed! Chochó! Olé!

(Načež krab zmizí stejně rychle, jako se objevil.)

Želva: Můj dobrý přítel. Ten si zahrává často, blázen. Já osobně bych si dal raději pozor, abych se dvoumetrového klacka čelofina nedotkl.

Achilles: Já myslel, že vy hrajete na čelo.

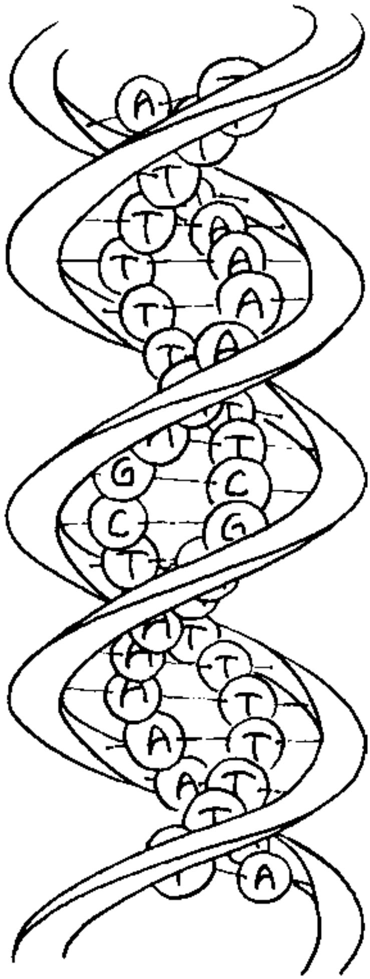
Želva: Teď hraju na kytaru.

Achilles: A v čem je to jiné?

Želva: Šmytec. A taky jeden nemá takové ty směšné bariéry.

Achilles: Povězte mi, prosím, jaké to je, když je člověk tak starý jako vy? Je pravda, co se říká, tedy že člověk vašeho věku nemá žádné starosti?

Želva: To je otázka filozofická. Ale jedna věc je jistá. Argumentace založená na osobním vkusu mi již nikterak nevadí. *Disputandum non est de gustibus.*



Obr. 43 Zde vidíme krátký úsek jednoho z Krabových genů, který se neustále točí dokola. Pokud bychom rozpletli obě vlákna DNA a položili je vedle sebe, pak by vypadala takto:
...TTTTTTTTTCGAAAAAAAAA...
...AAAAAAAAAGCTTTTTTTTT...
Všimněme si, že obě vlákna jsou stejná, jen jedno běží vpřed a druhé vzad. Touto vlastností se v hudbě definuje forma zvaná *krabí kánon* (nebo také „račí“). Částečně to připomíná (i když v trochu jiném hávu) palindromatické věty, které se čtou stejně zepředu i zezadu. V molekulární biologii se podobné úseky DNA nazývají „palindromy“. To je poněkud nepřesné, „krabí kánon“ by byl mnohem vhodnějším názvem. Nejenže je tento úsek DNA krabově-kanonický, ale navíc jeho základní struktura odpovídá struktuře dialogu. Přesvědčte se o tom sami!

Achilles: V tomto bodě se neshodneme. Ale když mluvíme o vkusu, nedávno jsem na koncertě konečně vyslechl ten známý *Krabí kánon* od vašeho oblíbence J. S. Bacha a musím vám říci, že mě úplně uchvátila jeho nádhera a duchaplnost, to nádherné tematické schéma, které ubíhá stejně dopředu i dozadu. Ale stejně si nemohu pomoci, pořád mi připadá Escher ještě o něco úžasnější než Bach.

Želva: Neodolatelná myšlenka. Ale zrovna v tomhle oboru Holanďani moc vkusu nepředvedli, nezdá se vám?

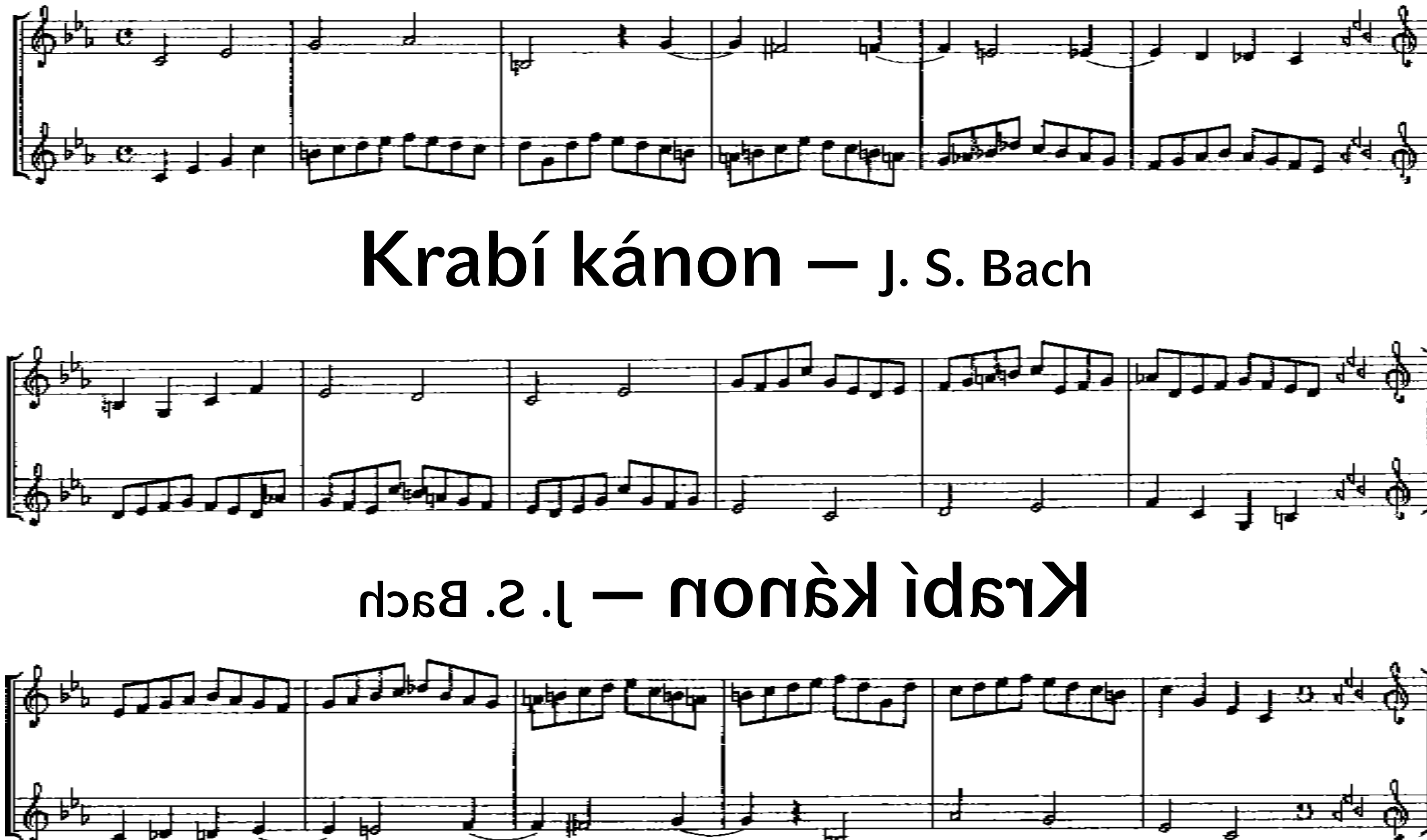
Achilles: Ale jděte. Nedáte si doutníček?

Želva: Ó, tisíceré díky. Udělal jste mi obrovskou radost.

Achilles: Mimochodem, vypadáte dnes mimořádně skvěle, to je třeba říci.

Želva: Myslíte? Tak to se mi hned půjde domů veseleji. Vezmu to pěšky.

Achilles: Skvělý nápad, vydat se na procházku! Nad to prostě není!



Obr. 44 *Krabí kánon* (jinak Canon a 2 cancrizans neboli Račí dvojhlasý kánon) z *Hudební obětiny* J. S. Bacha. [Vytištěno programem SMUT Donalda Byrda.]

Želva: Čtete mi myšlenky.
Achilles: Mám takovou radost, že jsem vás potkal.
Želva: I já vás, drahý příteli.
Achilles: Srdečně vás zdravím, pane Ž.

```
*‾‾‾*‾‾‾*‾‾‾*‾‾‾*‾‾‾*‾‾‾*‾‾‾*
  *‾‾‾*‾‾‾*‾‾‾*‾‾‾*‾‾‾*‾‾‾*
    *‾‾‾*‾‾‾*‾‾‾*‾‾‾*‾‾‾*
      *‾‾‾*‾‾‾*‾‾‾*‾‾‾*
        *‾‾‾*‾‾‾*‾‾‾*
          *‾‾‾*‾‾‾*
            *‾‾‾*
             *‾*
              **
              *
              *
              *
              *
              *
              **
              *
```

KAPITOLA OSMÁ

TYPOGRAFICKÁ TEORIE ČÍSEL

KRABŮV KÁNON A NEPŘÍMÁ AUTOREFERENCE

Nepřímá autoreference se v *Krabím kánonu* objevuje hned třikrát. Achilles a pan Želva si povídají o dílech M. C. Eschera a J. S. Bacha, která mají shodou okolností stejnou strukturu jako samotný dialog. (Představte si to překvapení, když jsem si to uvědomil!) A do třetice, Krab popisuje biologickou strukturu (řetězec DNA), o které platí totéž. Samozřejmě se může stát, že někdo si přečte dialog a plně pochopí jeho obsah, avšak zcela mu unikne, že dialog jako celek má strukturu krabího kánonu. Zkrátka a dobře, porozumí pouze jedné úrovni významu, ale druhé si nevšimne. Abychom odhalili autoreferenci, musíme se soustředit jak na formu, tak na obsah dialogu.

V této kapitole se budeme zabývat formálním systémem, který se nazývá *Typografická teorie čísel* a který budeme označovat zavedenou zkratkou TNT (jež v našem kontextu znamená „Typographical Number Theory“, nikoli „trinitrotoluen“ známý z kontextů jiných). Později se seznámíme s Gödelovou konstrukcí, která vychází z toho, že zkoumáme jak formu, tak obsah řetězců tohoto systému. Gödel objevil nečekaný trik, jak lze do obsahu řetězců otisknout jejich formu. Pojďme se tedy seznámit se systémem, který je schopen ovinout sám sebe.

CO CHCEME UMĚT VYJÁDŘIT V TNT

Začneme tím, že uvedeme příklady typických tvrzení teorie čísel. Poté se pokusíme nalézt vhodné elementární pojmy, jejichž pomocí by šlo tato tvrzení přeformulovat. Nakonec si zvolíme symboly, které přiřadíme jednotlivým elementárním pojmům. Hned na počátku je vhodné připomenout, že „teorie čísel“ se zabývá vlastnostmi přirozených čísel, popřípadě vlastnostmi množin přirozených čísel. *Přirozená čísla* tvoří nula a všechna kladná celá čísla. Zápornými čísly se teorie čísel nezabývá. Kdykoliv tedy použijeme slovo „číslo“, vždy tím budeme myslet přirozené číslo. Je velmi důležité pečlivě rozlišovat mezi formálním systémem (TNT) na jedné straně a méně striktně definovanou (říkejme „neformální“) teorií čísel jako standardním oborem matematiky na straně druhé. Teorii čísel budeme také říkat „teorie N“.

A zde jsou slíbené příklady tvrzení teorie N (teorie čísel):

(1) 5 je prvočíslo.
(2) 2 není druhá mocnina.

(3) 1 729 je součet dvou třetích mocnin.
(4) Žádný součet dvou kladných třetích mocnin není třetí mocninou.
(5) Existuje nekonečně mnoho prvočísel.
(6) 6 je sudé číslo.

Mohlo by se zdát, že budeme potřebovat symboly pro mnoho různých pojmů jako „prvočíslo", „třetí mocnina" nebo „kladný" – tyto pojmy však nejsou elementární. Například prvočíselnost souvisí s děliteli daného čísla a dělitelé zase souvisí s násobením. Rovněž třetí mocninu lze definovat pomocí násobení. Pokusme se tedy uvedená tvrzení přeformulovat pomocí jednodušších pojmů:

(1′) Neexistují čísla **a** a **b** větší než 1 taková, že **a** krát **b** se rovná 5.
(2′) Neexistuje číslo **b** takové, že **b** krát **b** se rovná 2.
(3′) Existují čísla **b** a **c** taková, že **b** krát **b** krát **b** plus **c** krát **c** krát **c** se rovná 1 729.
(4′) Pro všechna čísla **b** a **c** větší než 0 platí, že neexistuje číslo **a** takové, že **a** krát **a** krát **a** se rovná **b** krát **b** krát **b** plus **c** krát **c** krát **c**.
(5′) Pro každé číslo **a** existuje číslo **b** větší než **a** s vlastností, že neexistují čísla **c** a **d** větší než 1 taková, že **b** se rovná **c** krát **d**.
(6′) Existuje číslo **e** takové, že 2 krát **e** se rovná 6.

Tato analýza nás výrazně posunula směrem k elementárním prvkům jazyka teorie čísel. Vidíme, že některé výrazy se znova a znova opakují:

pro všechna čísla **b**	krát
existuje číslo **b** takové, že	plus
větší než	0, 1, 2, ...
se rovná	

Většině z nich přiřadíme symboly. Výjimkou je „větší než", které ještě dále rozložíme – tvrzení „**a** je větší než **b**" vyjádříme takto:

Existuje číslo **c** různé od 0 takové, že **a** se rovná **b** plus **c**.

NUMERÁLY

Nebudeme přiřazovat symbol každému přirozenému číslu zvlášť. Značení zavedeme podobně jako v případě pr-systému – každé přirozené číslo obdrží složený symbol sestavený podle jednoduchého pravidla. Přirozená čísla budeme označovat takto:

nula:	**0**
jedna:	**S0**
dva:	**SS0**
tři:	**SSS0**
atd.	

Symbol **S** interpretujeme jako „následovník". Proto například interpretace řetězce **SS0** je „následovník následovníka nuly". Tyto řetězce budeme nazývat *numerály*.

PROMĚNNÉ A TERMY

Nepochybně potřebujeme zavést označení pro blíže neurčená čísla – *proměnné*. K tomu nám poslouží písmena **a**, **b**, **c**, **d** a **e**. Pět písmen by nám ale nestačilo. Abychom měli k dispozici neomezenou zásobu symbolů pro proměnné, budeme postupovat podobně jako s atomy ve výrokovém počtu – za písmena lze připojit libovolný počet čárek. Proměnnými jsou tak například:

$$\mathsf{e} \quad \mathsf{d}' \quad \mathsf{c}'' \quad \mathsf{b}''' \quad \mathsf{a}''''$$

Používání pěti písmen je svým způsobem přepych, protože bychom plně vystačili s písmenem **a**, za které bychom doplňovali různé počty čárek. Později skutečně vypustíme písmena **b**, **c**, **d** a **e** a budeme pracovat s „asketickou" verzí TNT, ve které však bude o něco náročnější luštit složité formule. Prozatím si dopřejeme pohodlí a budeme využívat všech pět písmen.

A jak se vypořádáme se sčítáním a násobením? Tím nejjednodušším způsobem: pro „plus" a „krát" použijeme běžné symboly „+" a „·". Avšak pozor – při zápisu sčítání a násobení budeme důsledně používat závorky (zde se nám začíná rýsovat definice dobře utvořeného řetězce TNT). Například „**b** plus **c**" a „**b** krát **c**" zapíšeme takto:

$$(\mathsf{b} + \mathsf{c})$$
$$(\mathsf{b} \cdot \mathsf{c})$$

Pravidlo o závorkách je bezpodmínečně nutné dodržovat. Pokud bychom závorky vynechali, nedostali bychom dobře utvořenou formuli. (Proč „formuli"? V rámci TNT se obvykle hovoří o dobře utvořených formulích. Proto i my budeme často místo „řetězec TNT" používat slovo *formule*.)

Sčítání a násobení budeme chápat jako *binární* operace. To znamená, že je vždy aplikujeme právě jen na dvě čísla, a nikdy ne na tři, čtyři či více čísel. Pokud tedy chceme symbolicky vyjádřit „1 plus 2 plus 3", musíme si vybrat jednu z následujících alternativ:

$$(\mathsf{S0} + (\mathsf{SS0} + \mathsf{SSS0}))$$
$$((\mathsf{S0} + \mathsf{SS0}) + \mathsf{SSS0})$$

Také rovnost budeme označovat způsobem, který se nabízí: použijeme symbol „=". Výhoda toho, že přebíráme symboly z teorie N (tedy z neformální teorie čísel), je zřejmá: jazyk TNT se nám bude dobře číst. Nevýhoda je stejná jako ta, kterou přináší používání slov „bod" a „přímka" ve formálním systému geometrie: musíme být obezřetní a mít neustále na paměti rozdíl mezi standardním (neformálním) významem daného symbolu a jeho chováním podle striktních pravidel formálního systému. Když jsme si povídali o geometrii, psali jsme běžná slova malými písmeny, kdežto slova jako prvky formálního systému velkými písmeny – například v eliptické geometrii BOD odpovídal dvojici bodů. Zde nic takového dělat nebudeme.

Proto budeme muset neustále vynakládat intelektuální úsilí, abychom formální symboly nezaměňovali s různými asociacemi, které vyvolávají. Jak jsme zdůraznili u pr-systému: řetězec – – – není číslo 3, nýbrž pouze platí, že chování řetězce – – – ve formálním systému je izomorfní s chováním čísla 3 (přinejmenším co se sčítání týče). Totéž lze říci v případě TNT o řetězci SSS0.

ATOMY A SYMBOLY VÝROKOVÉHO POČTU

V TNT budeme používat všechny symboly výrokového počtu kromě písmen pro označování atomů (P, Q a R) a tyto symboly budeme také stejným způsobem interpretovat. Roli atomů budou hrát formule, které lze interpretovat jako tvrzení o rovnosti, například S0 = SS0 nebo (S0 · S0) = S0. Nyní jsme již dostatečně vybaveni k tomu, abychom mohli přeložit jednoduchá tvrzení do formálního jazyka TNT:

2 plus 3 se rovná 4:	(SS0 + SSS0) = SSSS0
2 plus 2 se nerovná 3:	~(SS0 + SS0) = SSS0
Jestliže se 1 rovná 0, pak se 0 rovná 1:	⟨S0 = 0 → 0 = S0⟩

První formule je atom; ostatní jsou složené formule.

Poznámka: Slovo „a“ ve výrazu „1 a 1 se rovná 2“ znamená totéž co „plus“, proto při překladu použijeme symbol „+“ (a samozřejmě nezbytné závorky); získáme atom (S0 + S0) = S00.

VOLNÉ PROMĚNNÉ A KVANTIFIKÁTORY

Výše uvedené dobře utvořené formule mají jednu společnou vlastnost – každou z nich interpretujeme jako větu, která je buď pravdivá, nebo nepravdivá. Avšak některé dobře utvořené formule tuto vlastnost nemají. Podívejme se například na formuli:

(b + S0) = SS0

Tuto formuli interpretujeme jako „b plus 1 se rovná 2“. Tomuto tvrzení neumíme přiřadit pravdivostní hodnotu, protože b není určené (je to proměnná). Je to podobné, jako když v nějaké větě použijeme zájmeno bez uvedení dalších souvislostí, například „Ona je nejapná“. Tato věta není ani pravdivá, ani nepravdivá – očekává se od nás, že ji upřesníme. V tomto případě říkáme, že formule je *otevřená* a že b je její *volná proměnná*.

Formuli, která neobsahuje žádnou volnou proměnnou, nazýváme *uzavřená* formule nebo také *sentence*. Otevřenou formuli můžeme přeměnit na sentenci tak, že na začátek věty, kterou daná otevřená formule vyjadřuje, doplníme *kvantifikátor* – buď výraz „existuje číslo b takové, že...“, nebo výraz „pro všechna čísla b platí, že“. V prvním případě dostaneme tvrzení, které je pravdivé:

Existuje číslo b takové, že b plus 1 se rovná 2.

Ve druhém případě dostaneme tvrzení, které je zjevně nepravdivé:

Pro všechna čísla b platí, že b plus 1 se rovná 2.

Nyní zavedeme symboly pro oba kvantifikátory a přeložíme tato tvrzení do jazyka TNT:

∃b: (b + S0) = SS0 („∃“ zastupuje „existuje“.)
∀b: (b + S0) = SS0 („∀“ zastupuje „pro všechna“.)

Tím jsme vytvořili sentence (uzavřené formule). Je třeba zdůraznit, že sentence už nevypovídají o blíže neurčených číslech; první z nich je *tvrzení o existenci* čísla s určitou vlastností, druhá sentence je *univerzální tvrzení*, že všechna čísla mají určitou vlastnost. Poznamenejme, že význam sentencí se nezmění, když použijeme jinou proměnnou, například c místo b:

∃c: (c + S0) = SS0
∀c: (c + S0) = SS0

Proměnnou, na kterou se váže nějaký kvantifikátor (také říkáme, že kvantifikátor danou proměnnou kvantifikuje), nazýváme *vázaná proměnná*. Následující dva příklady formulí názorně ukazují rozdíl mezi volnými a vázanými proměnnými:

(b · b) = SS0 (otevřená formule; proměnná b je volná)
~∃b: (b · b) = SS0 (uzavřená formule neboli *sentence*; proměnná b je vázaná)

První formule vyjadřuje *vlastnost*, kterou mohou mít přirozená čísla. V daném případě pochopitelně žádné přirozené číslo tuto vlastnost nemá – a toto tvrzení vyjadřuje právě druhá formule. Je velmi důležité porozumět rozdílu mezi formulí s *volnou proměnnou*, která vyjadřuje *vlastnost*, a formulí s *vázanou* proměnnou, která vyjadřuje buď *pravdu*, nebo *nepravdu*. Překlad formule s alespoň jednou volnou proměnnou (tedy otevřené formule) do přirozeného jazyka nazýváme *predikát*. Je to věta bez podmětu (případně s podmětem vyjádřeným blíže neurčeným zájmenem). Příklady (nearitmetických) predikátů jsou:

„je věta bez podmětu“
„by byla anomálie“
„ubíhá stejně dopředu i dozadu“
„na požádání vytvořil šestihlasou fugu“

Tyto predikáty vyjadřují vlastnosti, které určité objekty mohou (ale nemusí) mít. Mohli bychom k nim připojit nějaký fiktivní podmět, jako třeba „to a to“. Formule s volnou proměnou pak připomíná predikát s podmětem „to a to“. Například formule s volnou proměnnou b

(S0 + S0) = b

jako by říkala „1 plus 1 se rovná to a to“ – vyjadřuje vlastnost, kterou může mít číslo b. Jestliže bychom za b postupně dosazovali různé numerály, získali bychom řadu sentencí, z nichž většina by vyjadřovala nepravdu. Rozdíl mezi otevřenými formulemi a sentencemi ukážeme ještě na dvou příkladech. Formule

∀b: ∀c: (b + c) = (c + b)

je sentence, která tvrdí, že sčítání je komutativní operace (také říkáme, že b komutuje s c). Na druhou stranu

$$\forall c:(b + c) = (c + b)$$

je otevřená formule, protože proměnná b je volná. Vyjadřuje vlastnost, kterou může mít blíže neurčené číslo b – vlastnost, že při sčítání komutuje s jakýmkoliv číslem c.

NAŠE TVRZENÍ V JAZYCE TNT

Nyní již máme k dispozici kompletní slovník, s jehož pomocí můžeme vyjádřit libovolné tvrzení teorie čísel! Překládat složitá tvrzení teorie N do jazyka TNT, stejně tak jako chápat význam dobře utvořených formulí, vyžaduje jistou zručnost, kterou lze získat jedině na základě zkušeností. Proto se nyní vrátíme k šesti tvrzením, která jsme uvedli na začátku kapitoly, a přeložíme je do jazyka TNT. Mimochodem, je třeba si uvědomit, že překlad zdaleka není jednoznačný. Pro každé tvrzení existuje mnoho (dokonce nekonečně mnoho) způsobů, jak ho vyjádřit formálně.

Začneme s posledním tvrzením: „6 je sudé číslo“. To jsme přeformulovali pomocí jednodušších pojmů jako „Existuje číslo e takové, že 2 krát e se rovná 6“. V tomto případě je překlad jednoduchý:

$$\exists e:(SS0 \cdot e) = SSSSSS0$$

Je zřejmé, že bez kvantifikátoru bychom se neobešli. Nestačilo by napsat jenom:

$$(SS0 \cdot e) = SSSSSS0$$

Interpretace této formule není pochopitelně ani pravdivá, ani nepravdivá; pouze vyjadřuje vlastnost, kterou může mít číslo e.

Jelikož víme, že násobení je komutativní operace, mohli bychom stejně tak dobře psát:

$$\exists e:(e \cdot SS0) = SSSSSS0$$

A protože víme, že rovnost je symetrická relace, mohli bychom v rovnici klidně zaměnit pravou a levou stranu:

$$\exists e: SSSSSS0 = (SS0 \cdot e)$$

Uvedené tři překlady výroku „6 je sudé číslo“ jsou rozdílné formule. Proto nemusí nutně platit, že když je nějaká z těchto formulí teorémem, pak i zbylé dvě formule jsou teorémy. (Je to podobné jako s řetězci ‒‒p‒q‒‒‒ a ‒p‒‒q‒‒‒ v pr-systému – fakt, že první řetězec je teorém, bezprostředně nesouvisí s faktem, že i druhý řetězec je teorém. Dojem, že oba řetězce jsou rovnocenné, vzniká v našich myslích. Je tomu tak proto, že my lidé téměř automaticky přemýšlíme o interpretacích formulí, a nikoliv o jejich strukturálních vlastnostech.)

S druhým tvrzením „2 není druhá mocnina“ se vypořádáme snadno a rychle:

$$\sim\exists b:(b \cdot b) = SS0$$

Nicméně ani v tomto případě není překlad jednoznačný. Co kdybychom zvolili následující verzi?

$$\forall b{:}\sim(b \cdot b) = SS0$$

První verze říká „Neplatí, že existuje číslo b takové, že druhá mocnina b je 2“, zatímco druhá verze říká „Pro všechna čísla b neplatí, že druhá mocnina b je 2“. Znovu připomeňme, že *pro nás* mají obě verze stejný význam – avšak pro TNT to jsou dvě odlišné formule.

Podívejme se na třetí tvrzení: „1729 je součet dvou třetích mocnin“. V tomto případě použijeme *dva* po sobě jdoucí existenční kvantifikátory:

$$\exists b{:}\exists c{:}\underbrace{SSSSSS\ldots SSSSS}_{\text{1729 krát}}0 = (((b \cdot b) \cdot b) + ((c \cdot c) \cdot c))$$

Také zde se nabízí mnoho alternativ. Můžeme změnit pořadí kvantifikátorů, zaměnit pravou a levou stranu rovnice, zaměnit proměnné d a e, prohodit oba sčítance, zapsat jiným způsobem násobení atd. atd. Za zvláštní pozornost však stojí dvě následující verze:

$$\exists b{:}\exists c{:}(((SSSSSSSSSS0 \cdot SSSSSSSSSS0) \cdot SSSSSSSSSS0)+$$
$$+((SSSSSSSSS0 \cdot SSSSSSSSS0) \cdot SSSSSSSSS0)) = (((b \cdot b) \cdot b) + ((c \cdot c) \cdot c))$$

a

$$\exists b{:}\exists c{:}(((SSSSSSSSSSSS0 \cdot SSSSSSSSSSSS0) \cdot SSSSSSSSSSSS0)+$$
$$+((S0 \cdot S0) \cdot S0)) = (((b \cdot b) \cdot b) + ((c \cdot c) \cdot c))$$

Uhádnete proč?

PŘEKLADATELSKÉ TRIKY

Nyní se zaměříme na čtvrté tvrzení: „Žádný součet dvou kladných třetích mocnin není třetí mocninou.“ Nejdříve pro jednoduchost předpokládejme, že si přejeme vyjádřit pouze: „7 není součet dvou kladných třetích mocnin“. Toho dosáhneme nejjednodušším způsobem tak, že budeme *negovat* formuli, která tvrdí „7 *je* součet dvou kladných třetích mocnin“. To je ale velmi podobné třetímu tvrzení, které jsme již přeložili. Musíme pouze nějak přidat podmínku, že třetí mocniny mají být kladné. Pomůžeme si malým trikem – před proměnné vložíme symbol S:

$$\exists b{:}\exists c{:}SSSSSSS0 = (((Sb \cdot Sb) \cdot Sb) + ((Sc \cdot Sc) \cdot Sc))$$

Vidíme, že třetí mocnina se nepočítá přímo z b a c, nýbrž z jejich následovníků. A následovníci jsou zajisté kladná čísla, protože nejmenší hodnota, kterou mohou nabýt proměnné b a c, je nula. Pravá strana rovnice proto vyjadřuje součet dvou kladných třetích mocnin. Mimochodem si povšimněme, že v překladu výrazu „existují čísla b a c taková, že ...“ nenajdeme symbol „∧“, který zastupuje „a“.

Tento symbol používáme pouze tehdy, když spojujeme kompletní dobře utvořené formule. Jestliže za sebe řadíme dva kvantifikátory, symbol „∧“ nepoužíváme.

Přeložili jsme tedy tvrzení „7 je součet dvou kladných třetích mocnin“ a nyní potřebujeme vytvořit jeho negaci. To uděláme prostě tak, že na začátek celého řetězce přidáme vlnovku. (Poznámka: Nemusíme negovat každý kvantifikátor zvlášť, přestože překládaný výraz zní „Neexistují čísla b a c taková, že ...“.). Dostaneme:

$$\sim\exists b{:}\exists c{:}SSSSSSS0 = (((Sb \cdot Sb) \cdot Sb) + ((Sc \cdot Sc) \cdot Sc))$$

Naším konečným cílem je vyjádřit, že tuto vlastnost mají všechny třetí mocniny, a ne jenom číslo 7. Numerál SSSSSSS0 proto zaměníme řetězcem ((a · a) · a)), který je překladem výrazu „třetí mocnina a“:

$$\sim\exists b{:}\exists c{:}((a \cdot a) \cdot a)) = (((Sb \cdot Sb) \cdot Sb) + ((Sc \cdot Sc) \cdot Sc))$$

Tím jsme obdrželi formuli, která je *otevřená*, protože její proměnná a je zatím volná. Tato formule vyjadřuje vlastnost, kterou může mít číslo a. My bychom však rádi tvrdili, že tuto vlastnost mají všechna čísla. A to už je jednoduché – před celý dlouhý řetězec přidáme univerzální kvantifikátor:

$$\forall a{:}\sim\exists b{:}\exists c{:}((a \cdot a) \cdot a)) = (((Sb \cdot Sb) \cdot Sb) + ((Sc \cdot Sc) \cdot Sc))$$

Stejně dobrá je i následující verze překladu:

$$\sim\exists a{:}\exists b{:}\exists c{:}((a \cdot a) \cdot a)) = (((Sb \cdot Sb) \cdot Sb) + ((Sc \cdot Sc) \cdot Sc))$$

V *asketické* TNT bychom použili a’ místo b a a” místo c a dostali bychom formuli:

$$\sim\exists a{:}\exists a'{:}\exists a''{:}((a \cdot a) \cdot a)) = (((Sa' \cdot Sa') \cdot Sa') + ((Sa'' \cdot Sa'') \cdot Sa''))$$

A jak si poradíme s prvním tvrzením: „5 je prvočíslo“? Toto tvrzení jsme přepsali jako: „Neexistují čísla a a b větší než 1 taková, že 5 se rovná a krát b“. Opět použijeme trik a formulaci ještě jednou pozměníme: „Neexistují čísla a a b taková, že 5 se rovná a plus 2 krát b plus 2“. Tato nová verze říká to samé co verze předchozí díky tomu, že hodnoty proměnných a a b nabývají přirozených čísel. Výraz „b plus 2“ bychom nyní mohli přeložit jako (b + SS0), ale my použijeme ještě kratší alternativu: SSb. Podobně „c plus 2“ můžeme psát jako SSc. Tím dospějeme k nanejvýš stručnému překladu:

$$\sim\exists b{:}\exists c{:}SSSSS0 = (SSb \cdot SSc)$$

Bez vlnovky na počátku by formule tvrdila, že *existují* dvě přirozená čísla, která když obě zvětšíme o 2 a poté vynásobíme, dají 5. Počáteční vlnovka celé toto tvrzení popírá – výsledná formule proto říká, že 5 je prvočíslo.

Řekněme, že bychom nyní rádi pozměnili toto tvrzení tak, aby říkalo, že d plus e plus 1 je prvočíslo. Nejrychlejší cesta je prostě a jednoduše nahradit numerál pro číslo 5 řetězcem (d + Se):

$$\sim\exists b{:}\exists c{:}(d + Se) = (SSb \cdot SSc)$$

Opět máme otevřenou formuli, jejíž interpretace není ani pravdivá, ani nepravdivá, a která vyjadřuje určitou vlastnost blíže neurčených čísel d a e. Všimněme si, že číslo reprezentované řetězcem (d + Se) je nutně větší než d, protože vznikne přičtením nějakého kladného čísla k číslu d. Jestliže nyní proměnnou e kvantifikujeme existenčním kvantifikátorem, dostaneme (stále ještě otevřenou) formuli, která říká:

Existuje prvočíslo, které je větší než d.

$$\exists e{:}\sim\exists b{:}\exists c{:}(Sd + e) = (SSb \cdot SSc)$$

Nyní zbývá už jen prohlásit, že vlastnost, kterou tato formule vyjadřuje, má libovolné číslo d. To uděláme tak, že proměnnou d kvantifikujeme univerzálním kvantifikátorem:

$$\forall d{:}\exists e{:}\sim\exists b{:}\exists c{:}(Sd + e) = (SSb \cdot SSc)$$

A výsledná sentence je překladem pátého tvrzení!

CVIČENÍ PRO ČTENÁŘE

Dokončili jsme překlad šesti tvrzení z teorie čísel, která jsme předložili na začátku kapitoly, to však stále neznamená, že byste se již stali experty na jazyk TNT. K tomu je třeba zvládnout mnoho dalších záludností. Uvedeme nyní šest příkladů dobře utvořených formulí, na kterých si můžete vyzkoušet, jak rozumíte jazyku TNT. Co jednotlivé formule říkají? Které z nich jsou (pochopitelně poté, co je interpretujeme) pravdivé a které ne? (Nápověda: Při tomto cvičení je vhodné postupovat vždy zprava doleva. Nejdříve přeložíme atom; poté promyslíme, co znamená přidání jednoho kvantifikátoru nebo vlnovky; znova se posuneme nalevo a přidáme další kvantifikátor nebo vlnovku; a totéž uděláme ještě jednou do třetice.)

$$\sim\forall c{:}\exists b{:}(SS0 \cdot b) = c$$
$$\forall c{:}\sim\exists b{:}(SS0 \cdot b) = c$$
$$\forall c{:}\exists b{:}\sim(SS0 \cdot b) = c$$
$$\sim\exists b{:}\forall c{:}(SS0 \cdot b) = c$$
$$\exists b{:}\sim\forall c{:}(SS0 \cdot b) = c$$
$$\exists b{:}\forall c{:}\sim(SS0 \cdot b) = c$$

(Další nápověda: Pravdivé jsou buď dvě, nebo čtyři z uvedených formulí, ostatní jsou nepravdivé.)

JAK ROZEZNAT PRAVDU OD NEPRAVDY?

Dospěli jsme k určitému mezníku, a proto je vhodné se pozastavit a znova nabrat dech. Zamysleme se krátce nad tím, co by znamenalo mít formální systém, který by proséval formule a odděloval pravdivé zrno od nepravdivých plev. Na rozdíl od člověka, který vnímá formule jako určitá tvrzení, by takový systém s každou formulí nakládal jako se strukturou, která má jistou formu, ale nikoliv obsah. Choval by se jako síto, kterým projdou pouze struktury s požadovanou fazonou –

„fazonou pravdivosti". Jestliže jste si prošli šest formulí z předchozího cvičení a na základě významu rozhodli o jejich pravdivosti, musíte ocenit rafinovanost, jakou by musel mít systém, který by uměl udělat totéž pomocí typografických pravidel! Hranice, která odděluje říši pravdivých tvrzení od říše nepravdivých tvrzení (zapsaných v jazyce TNT), je všechno jiné než přímá linie; ve skutečnosti je tvořená spoustou zrádných zákrutů (připomeňme si obrázek 18). Matematici pracují již mnoho století a zatím se jim podařilo zakreslit jen některé její úseky. Vymyslet typografickou metodu, která by každou formuli neomylně přiřadila na správnou stranu hranice, to by byl vskutku bravurní kousek!

PRAVIDLA PRO DOBŘE UTVOŘENÉ FORMULE

V předchozím výkladu jsme se postupně seznámili s různými pravidly, jak vytvářet dobře utvořené formule v TNT. Jistě nebude od věci, když nyní všechna pravidla přehledně shrneme. Nejdříve definujeme *numerály*, *proměnné* a *termy*. Tyto tři typy řetězců samy o sobě ještě nejsou dobře utvořené formule, ale tvoří jejich stavební kameny. Nejmenší dobře utvořené formule jsou *atomy*, ze kterých je pak možné sestavovat složitější formule. Mnohá pravidla jsou rekurzivní a při aplikaci na řetězce tyto řetězce prodlužují – použijí již vytvořený řetězec určitého typu a vytvoří z něho jiný řetězec stejného typu, který je delší. V následující tabulce symboly „*x*" a „*y*" zastupují dobře utvořené formule, symboly „*s*", „*t*" zastupují termy a symbol „*u*" zastupuje proměnnou. Netřeba zdůrazňovat, že těchto pět symbolů nepatří do jazyka TNT.

NUMERÁLY.

0 je numerál.

Jestliže před numerál doplníme S, pak takto vzniklý řetězec je také numerál.

Příklady: 0 S0 SS0 SSS0 SSSS0 SSSSS0

PROMĚNNÉ.

a je proměnná. Pokud nepracujeme v asketické verzi TNT, pak i b, c, d a e jsou proměnné.

Jestliže za proměnnou přidáme čárku, pak i takto vzniklý řetězec je proměnná.

Příklady: a b′ c″ d‴ e⁗

TERMY.

Numerály a proměnné jsou termy.

Jestliže před term doplníme S, pak takto vzniklý řetězec je také term.

Jestliže *s* a *t* jsou termy, pak i řetězce (*s* + *t*) a (*s* · *t*) jsou termy.

Příklady: 0 b SSa′ (S0 · (SS0 + c)) S(Sa · (Sb · Sc))

TERMY můžeme rozdělit do dvou kategorií:

(1) UZAVŘENÉ termy, které neobsahují žádnou proměnnou.
Příklady: 0 (S0 + S0) SS((SS0 · SS0) + (S0 · S0))

(2) OTEVŘENÉ termy, které obsahují proměnné.
Příklady: b Sa (b + S0) (((S0 + S0) + S0) + e)

Výše uvedená pravidla nám říkají, jak vytvořit *části* dobře utvořených formulí; zbývající pravidla nám říkají, jak je sestavit do *úplných* dobře utvořených formulí.

ATOMY.
Jestliže *s* a *t* jsou termy, pak řetězec *s* = *t* je atom. Atom je dobře utvořená formule.
Příklady: S0 = 0 (SS0 + SS0) = SSSS0 S(b + c) = ((c · d) · e)

Jestliže atom obsahuje proměnnou *u*, pak *u* je v tomto atomu *volná* proměnná. Poslední atom v příkladech má čtyři volné proměnné.

NEGACE.
Jestliže před dobře utvořenou formuli doplníme vlnovku, pak takto vzniklý řetězec je také dobře utvořená formule.
Příklady: ~S0 = 0 ~∃b: (b + b) = S0 ~⟨0 = 0 → S0 = 0⟩ ~b = S0

Negace nemění *charakter* proměnné (to znamená, že volná proměnná zůstává v takto vzniklé formuli volnou a vázaná proměnná v ní zůstává vázanou).

SLOŽENÉ FORMULE.
Jestliže *x* a *y* jsou dobře utvořené formule a žádná volná proměnná v jedné z formulí není vázaná v druhé formuli, pak následující řetězce jsou také dobře utvořené formule:
$\langle x \wedge y\rangle$, $\langle x \vee y\rangle$, $\langle x \rightarrow y\rangle$.
Příklady: ⟨0 = 0 ∧ ~0 = 0⟩ ⟨b = b ∨ ~∃c: c = b⟩ ⟨S0 = 0 → ∀c: ~∃b: (b + b) = c⟩

Charakter proměnných se v takto vzniklých formulích nemění.

KVANTIFIKACE.
Jestliže *u* je proměnná a *x* je dobře utvořená formule, ve které je proměnná *u* volná, pak následující řetězce jsou dobře utvořené formule:
∃u: x a ∀u: x
Proměnná *u* je v takto vzniklých formulích vázaná.
Příklady: ∀b: ⟨b = b ∨ ~∃c: c = b⟩ ∀c: ~∃b: (b + b) = c ~∃c: Sc = d

OTEVŘENÉ FORMULE obsahují alespoň jednu volnou proměnnou.
Příklady: ~c = c b = b ⟨∀b: b = b ∧ ~c = c⟩

UZAVŘENÉ FORMULE (SENTENCE) neobsahují volné proměnné.
Příklady: S0 = 0 ~∀d: d = 0 ∃c: ⟨∀b: b = b ∧ ~c = c⟩
Tím jsme dokončili přehled pravidel pro vytváření dobře utvořených formulí.