7. Chromatická fantazie a spor

Po velmi zdařilé koupeli v rybníčku se Želva vyškrábe ven a utírá se, když vtom, kdo nejde kolem: Achilles.

Želva: Hola, Achille! Zrovna jsem na vás myslel, jak jsem si tak ploval kolem rybníčku.

Achilles: No není to zvláštní? Já jsem na vás také zrovna myslel, jak jsem si to tak rázoval lukami. V tuhle dobu jsou tak zelené…

Želva: Myslíte? To mi připomíná jeden nápad, o kterém jsem si s vámi chtěl pohovořit. Chcete si to poslechnout?

Achilles: S největší radostí. Tedy, s největší radostí, avšak pouze za předpokladu, že mě nebudete chtít zase vtáhnout do některé z těch vašich proslulých záludných logických léček, pane Ž.

Želva: Záludných léček? Tak to mi tedy křivdíte. Copak já bych někdy udělal něco záludného? Jsem mírumilovný tvor, nikoho neotravuji a vedu klidný býložravý život. A mé myšlenky poklidně těkají kdesi mezi zvláštnostmi a podivnostmi běhu věcí (tedy alespoň podle mého názoru). Já, jak se obávám, jsem přece pouhým skromným pozorovatelem jevů, jenž plahočí se krajinou a neslyšně předává svá slova větru způsobem zcela neokázalým. Avšak abych zcela rozptýlil vaše obavy a ujistil vás o čistotě svých zámyslů, sdělím vám, že jsem hodlal hovořit pouze o svém krunýři, což, jak je vám známo, jest předmět logice na hony vzdálený!

Achilles: Vaše slova mne vskutku uchlácholila, pane Ž., a navíc jste ještě opravdu vydráždil moji zvědavost. Opravdu moc rád si poslechnu, co máte na srdci i na krunýři, i když to nebude okázalé.

Želva: Dobře tedy… tak, kde bych nejlépe mohl začít? Hmmm… Co vás jako první napadne při pohledu na můj krunýř, Achille?

Achilles: Že je neobvykle čistý!

Želva: Děkuji. Zrovna jsem si byl zaplavat a omyl jsem z něj několik vrstev špíny, které jsem nashromáždil během uplynulého století. Díky tomu máte možnost se přesvědčit, jak je můj krunýř ve skutečnosti krásně zelený.

Achilles: Ano, je to nádherný zdravě vyhlížející zelený krunýř. Je příjemné na něj popatřit, an se leskne na slunci.

Želva: Zelený? Není přece zelený.

Achilles: Přece vy sám jste mi právě sdělil, že váš krunýř je zelený.

Želva: To je pravda.

Achilles: Pak se shodujeme: je zelený.

Želva: Ne, není zelený.

Achilles: Já tu vaši hru asi chápu. Snažíte se naznačit, že to, co vyslovíte, není ve skutečnosti pravda, že si želvy hrají s jazykem, že vaše tvrzení neodpovídá realitě, že...

Želva: To tedy ani náhodou. Želvy považují slova za cosi posvátného a nedotknutelného. Želvy ctí přesnost.

Achilles: Tak proč tedy zároveň tvrdíte, že váš krunýř je i není zelený?

Želva: Nic takového jsem neřekl, nicméně přál bych si, aby to tak bylo.

Achilles: Byl byste rád, kdybyste to byl řekl?

Želva: Ani v nejmenším. Lituji, že to tak znělo, a nesouhlasím s tím celým svým srdcem.

Achilles: Ale to je zcela ve sporu s tím, co jste říkal předtím.

Želva: Ve sporu? Ve sporu? Nikdy neříkám nic sporného. Spor je cosi, co zcela odporuje želví povaze.

Achilles: Tak tentokrát jsem vás nachytal, kluzký plaze. Načapal jsem vás na švestkách a ještě k tomu po uši ve sporu.

Želva: Inu ano, myslím, že se vám to povedlo.

Achilles: A zase! Zabředáváte do sporu hlouběji a hlouběji! Zamotal jste se do toho tak, že se s vámi už vůbec nedá mluvit!

Želva: Mýlíte se. Já se například sám se sebou dohaduji velice snadno. Možná, že chyba je na vaší straně. Troufám si vyslovit domněnku, že ten, kdo je zde ve sporu, jste vy, ale zároveň jste natolik uvězněn ve své vlastní spletité síti, že ani nejste schopen vidět, jak strašně jste nekonzistentní.

Achilles: No to už přestává všechno! Taková nehoráznost! Hned vám dokážu, že sporný jste vy, a že o tom není sporu!

Želva: Pokud je to tak, jak tvrdíte, pak by váš úkol měl být snadný. Není přece nic snazšího, než poukázat na zjevný spor. Tak hurá, pusťte se do toho.

Achilles: Hmm... No dobře. Teď tedy zrovna úplně přesně nevím, kde začít. Aha..., už vím. Vy jste řekl, že (1) váš krunýř je zelený, načež jste jedním dechem prohlásil, že (2) váš krunýř není zelený. Co bych měl k tomu ještě dodávat?

Želva: Prostě mi řekněte, kde vidíte jaký spor. Přestaňte se motat v kruzích kolem problému a ukažte mi ten spor.

Achilles: Ale, ... to přece, ... sakra... Aha, začíná mi to být jasné. (Já jsem někdy takový pitomec!) Problém je v tom, že vy a já máme rozdílné představy o tom, co je to spor. To je to naše jádro pudla. Tak podívejte, řeknu vám to, doufám, dostatečně srozumitelně: spor nastane, jestliže nějaká osoba vysloví nějaký výrok a současně jej sama popře.

Želva: To je velmi chytře řečeno. Ale chtěl bych vidět, jak by to někdo dokázal provést v praxi. Takový břichomluvec by se asi mohl stát mistrem sporů, kdyby jednu věc tvrdil ústy a zároveň ji popíral břichem, jenže já břichomluvec nejsem.

Achilles: Ale já jsem to nemyslel takhle, chtěl jsem říci, že třeba někdo něco vysloví a ihned to popře ještě v té samé větě! Nemusí to být úplně ve stejnou chvíli.

Želva: Ale v příkladu, který mi kladete za vinu, nešlo o JEDNU větu, nýbrž o DVĚ.

Achilles: No ano – dvě věty, které se navzájem vylučují.

Želva: Pohled na to, jak se spletitá struktura vašich pomýlených úvah dostává na světlo, mne naplňuje smutkem, Achille. Nejprve jste řekl, že spor je cosi, co nastane v jediné větě. Pak jste prohlásil, že jste nalezl spor ve dvou větách, které já jsem vyslovil. Upřímně řečeno, je to přesně tak, jak jsem říkal. Váš vlastní systém logických úvah je natolik šálivý, že dokonce ani díky němu nevidíte, jak je nekonzistentní. Zato zvenčí je to neobyčejně zřetelné.

Achilles: Ta vaše úhybná taktika mě někdy mate natolik, že už pak ani nepoznám, jestli se dohadujeme o něčem zcela bezvýznamném či o nějakém hlubokém a zcela zásadním problému všehomíra.

Želva: Ujišťuji vás, že Želvy se nezaobírají bezvýznamnými záležitostmi. Musí tedy jít o tu druhou možnost.

Achilles: Jsem skutečně naprosto ujištěn, díky. Teď jsem měl možnost se na chvilku zamyslet, a myslím, že jsem přišel na nezbytný logický krok, jímž vás přesvědčím o tom, že jste sám se sebou ve sporu.

Želva: Dobrá, dobrá. Doufám, že je to jednoduchý logický krok, naprosto nesporný a neoddiskutovatelný.

Achilles: To si pište. S tím budete muset souhlasit dokonce i vy. Myšlenka je založena na tom, že protože věříte v platnost výroku (1) („Můj krunýř je zelený") A ZÁROVEŇ věříte v platnost výroku (2) („Můj krunýř není zelený"), plyne z toho, že také věříte ve výrok, který vznikne sloučením obou těchto výroků do jedné věty, nebo snad ne?

Želva: Samozřejmě, zní to celkem rozumně... Ovšem pouze za předpokladu, že proces slučování výroků je univerzálně platný. Ale na tom se možná shodneme.

Achilles: Výborně, a mám vás! Sloučený výrok, který jsem vám předložil, je přece...

Želva: Ale ve formulování vět musíme být opatrní. Například, asi byste se mnou souhlasil, kdybych řekl: „Achilles má ve své knihovně dobrý výkladový slovník," viďte?

Achilles: Ovšemže. Kdo by si dovolil o tom pochybovat?

Želva: Skvěle. Podobně, pozorování „V dobrém slovníku není E za U" je vcelku odůvodněné, že?

Achilles: No samozřejmě. Copak jsem někdo, kdo neumí abecedu?

Želva: Takže je pravda, že „V Achillově slovníku není Ezau".

Achilles: Jak, není? Jasně, že tam je! Je to skvělý slovník, jsou v něm všechny důležité biblické postavy!

Želva: Tak vidíte, že sloučení dvou výroků do jednoho není vždycky bezpečná strategie, nezdá se vám?

Achilles: Jenomže vy ty výroky kombinujete takovým nějakým... nesmyslným způsobem!

Želva: Nesmyslným? Co se vám nezdá na tom, jak jsem je zkombinoval? Vy sám byste to učinil jinak?

Achilles: No jasně! Vynechal jste mezery! To se nesmí! Místo toho jste měl ty výroky pouze sloučit pomocí logické spojky „A“!

Želva: JÁ že jsem něco vynechal? JÁ že jsem měl něco sloučit? Možná VY, kdyby bylo PO VAŠEM, byste to tak provedl.

Achilles: Ale ne, je to přece LOGICKÉ! S mojí osobou to nemá co dělat.

Želva: A už jste zase mimo. Tohle nastane vždycky, když se uchýlíte ke své logice a jejím vznešeně znějícím principům. Z toho mě, prosím, dnes vynechte.

Achilles: Ach, pane Ž., ušetřete mě těchto strašlivých muk. Moc dobře víte, co znamená logická spojka „A“! Sloučit dvě platná tvrzení pomocí logické spojky „A“ je přece zcela neškodné!

Želva: Neškodné! A to se mi nebojíte říci do očí! Taková nestydatost! Tohle je ta nejodpornější intrika, sloužící k polapení ubohého nevinného nemotorného tvora do zhoubného sporu. Kdyby to bylo tak neškodné, tak proč byste se asi tak úporně snažil, abyste mě na to nachytal, co?

Achilles: Tak teď doopravdy nevím, co mám na to říci. Jsem vaší zásluhou zcela bezradný. Cítím se jako ničema, ačkoli mé zámysly byly zcela čisté a nevinné.

Želva: To si o sobě nalhává každý.

Achilles: Je mi hanba, že ve snaze vás přechytračit jsem užil slov, s jejichž pomocí jsem vás chtěl vlákat do léčky vnitřního rozporu. Cítím se jako mizera.

Želva: A to byste taky měl. Dobře vím, co jste na mě chystal. Chtěl jste, abych uznal platnost výroku (3), který by zněl: „Můj krunýř je zelený a můj krunýř není zelený.“ Avšak taková křiklavá nepravda je želvímu jazyku zcela cizí.

Achilles: Je mi moc líto, že jsem tuto debatu vyprovokoval.

Želva: Nemusí vám to být líto. Mé city nejsou raněny. Jsem koneckonců uvyklý podivným způsobům, jakým o mně mé okolí smýšlí. Cítím se ve vaší společnosti dobře, milý Achille, i když jsou vaše úvahy občas nejasné.

Achilles: Ano, jistě… Obávám se, že jsem otrokem svých vlastních zlozvyků a že se budu na své trnité cestě za Pravdou opětovně mýlit a mýlit.

Želva: Naše dnešní rozprava by vám mohla malinko pomoci k nabrání správného kursu. Přeji vám krásný den, Achille.

Achilles: I vám, pane Ž.

KAPITOLA SEDMÁ

VÝROKOVÝ POČET

SLOVA A SYMBOLY

Předchozí dialog je svým způsobem podobný dialogu *Dvojhlasá invence* od Lewise Carrolla. V obou případech totiž pan Želva odmítá (přinejmenším tehdy, když by to nebylo v jeho prospěch) používat normální a běžná slova normálním a běžným způsobem. Zachází se slovy jinak, než jak si přeje Achilles. Carrollovu paradoxu jsme se snažili porozumět v minulé kapitole. V této kapitole vytvoříme formální systém, jehož symboly budou zastupovat různá slova přirozeného jazyka, a pro manipulaci s těmito symboly zavedeme přísná pravidla. Jeden konkrétní symbol našeho systému se bude chovat tak, jak požadoval Achilles, aby se v argumentaci pana Želvy chovalo slovo „*a*". A jiný symbol se bude chovat tak, jak se v běžné řeči chovají slova „*jestliže... pak*". Kromě toho se budeme zabývat už jen dvěma dalšími slovy: „*nebo*" a „*ne*". Usuzování, které je založeno pouze na správném používání slov „*a*", „*jestliže... pak*", „*nebo*" a „*ne*", nazýváme *usuzování o výrocích.*

ABECEDA A PRVNÍ PRAVIDLO VÝROKOVÉHO POČTU

Formální systém nazývaný *výrokový počet* si představíme postupně, trochu jako detektivní příběh. Čtenář si tak může průběžně promýšlet další postup. Ze všeho nejdříve uvedeme seznam všech používaných symbolů, tedy abecedu jazyka výrokového počtu:

$$\begin{array}{cccc} & \langle & \rangle & \\ \mathsf{P} & \mathsf{Q} & \mathsf{R} & ' \\ \wedge & \vee & \rightarrow & \sim \\ & [&] & \end{array}$$

A hned také zavedeme první pravidlo výrokového počtu:

PRAVIDLO SPOJENÍ: Jestliže x a y jsou teorémy, pak řetězec $\langle x \wedge y \rangle$ je také teorém.

Pravidlo spojení nám umožňuje vytvořit nový teorém tím, že spojíme dva jiné teorémy. Tento postup by měl být čtenáři povědomý z předchozího dialogu.

DOBŘE UTVOŘENÉ ŘETĚZCE

Brzy se seznámíme s dalšími odvozovacími pravidly. Předtím však musíme popsat (podobně jako jsme to učinili u předchozích formálních systémů), jak vypadají *dobře utvořené* řetězce ve výrokovém počtu. Množinu dobře utvořených řetězců budeme definovat rekurzivně. Nejjednodušší dobře utvořené řetězce jsou

ATOMY: P, Q a R jsou *atomy*. Nový atom můžeme vytvořit tak, že k nějakému již vytvořenému atomu přidáme zprava čárku – proto jsou atomy i R′, Q″, P‴ atd. To nám dává k dispozici neomezené množství atomů. Všechny atomy jsou dobře utvořené řetězce.

Dále zavedeme čtyři rekurzivní

PRAVIDLA PRO VYTVÁŘENÍ ŘETĚZCŮ: Jestliže *x* a *y* jsou dobře utvořené řetězce, pak následující čtyři řetězce jsou také dobře utvořené:

(1) $\sim x$
(2) $\langle x \wedge y \rangle$
(3) $\langle x \vee y \rangle$
(4) $\langle x \rightarrow y \rangle$

Například všechny následující řetězce jsou dobře utvořené:

P	atom
~P	podle (1)
~~P	podle (1)
Q′	atom
~Q′	podle (1)
⟨P ∧ ~Q′⟩	podle (2)
~⟨P ∧ ~Q′⟩	podle (1)
⟨~~P → Q′⟩	podle (4)
⟨~⟨P ∧ ~Q′⟩ ∨ ⟨~~P → Q′⟩⟩	podle (3)

Poslední řetězec možná nahání hrůzu, ale i on vznikl jednoduše ze dvou částí, konkrétně ze dvou řetězců, které se nacházejí hned nad ním. A oba tyto řetězce byly opět vytvořeny z nějakých předchozích řetězců atd. Je vidět, že každý dobře utvořený řetězec lze postupně rozložit až na jeho elementární složky, kterými jsou atomy. Přitom prostě a jednoduše aplikujeme pravidla pozpátku tak dlouho, dokud to jde. Máme zaručeno, že tento proces jednou skončí. Pravidla pro vytváření řetězců jsou totiž prodlužující pravidla, takže když je používáme pozpátku, nevyhnutelně nás nakonec přivedou až k atomům.

Metodou postupného rozkládání řetězce ověřujeme, zda daný řetězec je dobře utvořený. Jde o *rozhodovací proceduru shora dolu*. Čtenář si může nyní sám vyzkoušet, jak jí porozuměl. Úkolem je zjistit, které z následujících řetězců jsou dobře utvořené:

(1) ⟨P⟩
(2) ⟨~P⟩

(3) $\langle P \wedge Q \wedge R \rangle$
(4) $\langle P \wedge Q \rangle$
(5) $\langle\langle P \wedge Q \rangle \wedge \langle Q{\sim} \wedge P \rangle\rangle$
(6) $\langle P \wedge {\sim}P \rangle$
(7) $\langle\langle P \vee \langle Q \rightarrow R \rangle\rangle \wedge \langle {\sim}P \vee {\sim}R' \rangle\rangle$
(8) $\langle P \wedge Q \rangle \wedge \langle Q \wedge P \rangle$

(Řešení: Řetězce, které jsou očíslovány Fibonacciho čísly, nejsou dobře utvořené. Ostatní řetězce jsou dobře utvořené.)

DALŠÍ ODVOZOVACÍ PRAVIDLA

Nyní se dostáváme k dalším pravidlům, pomocí nichž odvozujeme *teorémy* výrokového počtu. Při popisu odvozovacích pravidlech používáme symboly „*x*“ a „*y*“. Budeme je chápat vždy tak, že zastupují libovolné *dobře utvořené* řetězce.

PRAVIDLO ODDĚLENÍ: Jestliže $\langle x \wedge y \rangle$ je teorém, pak *x* a *y* jsou také teorémy.

Mimochodem, čtenář už by měl nyní tušit, co symbol „∧“ znamená. (Nápověda: jde o problematické slovo z předchozího dialogu.) A z následujícího pravidla by zase mělo být jasné, co reprezentuje vlnovka („~“):

PRAVIDLO DVOJÍ VLNOVKY: Z jakéhokoliv teorému můžeme odstranit řetězec „~~“. Do jakéhokoliv teorému můžeme vložit řetězec „~~“ za předpokladu, že nově vzniklý řetězec je dobře utvořený. V obou případech je výsledný řetězec také teorém.

PRAVIDLO FANTAZIE

Náš systém výrokového počtu je zvláštní tím, že sestává pouze z odvozovacích pravidel a neobsahuje žádné axiomy. Jestliže si čtenář připomene formální systémy, s kterými jsme se seznámili dříve, asi se zeptá: „Jak vůbec můžeme získat nějaké teorémy? Z čeho máme začít odvozovat?“ Odpověď je prostá. Máme k dispozici speciální pravidlo, které umí vykouzlit teorém doslova z ničeho – nepotřebuje žádný „starý teorém“ jako svůj vstup. (Všechna ostatní pravidla nějaký vstup potřebují.) Toto speciální pravidlo nazýváme *pravidlo fantazie*. Jak záhy uvidíme, zvolený název je docela výstižný.

Chceme-li použít pravidlo fantazie, napíšeme si nejprve libovolný dobře utvořený řetězec *x*. Poté začneme „fantazírovat“ a zeptáme se: „*Co kdyby* řetězec *x* byl axiom nebo teorém?“ Odpovědět necháme systém. To znamená, že vezmeme *x* jako úvodní řádek a z něho pak odvozujeme další řetězce (samozřejmě přísně podle pravidel systému). Předpokládejme, že v posledním řádku dojdeme k řetězci *y*. Vše počínaje *x* a konče *y* je pouhá fantazie; říkáme, že *x* je *předpoklad* fantazie a *y* její *závěr*. V následujícím kroku se *z fantazie vynoříme* a můžeme shrnout, co jsme se dozvěděli:

Pokud by x byl teorém, pak by y byl také teorém.

Čtenář se stále může nedůvěřivě ptát: „Kde je nějaký *skutečný* teorém?“ A zde nastupuje pravidlo fantazie, které říká, že skutečný teorém je řetězec:

$$\langle x \rightarrow y \rangle$$

Stojí za povšimnutí, jak se tento řetězec podobá výše uvedené větě.

Při odvozování vždy oznamujeme vnoření do fantazie levou hranatou závorkou „[“ a vynoření z fantazie pravou hranatou závorkou „]“. To znamená, že kdykoliv vidíme levou hranatou závorku, víme, že se *vnořujeme* do fantazie a že v *následujícím* řádku je její *předpoklad*. A podobně, kdykoliv vidíme pravou hranatou závorku, víme, že se *vynořujeme* z fantazie a že v *předchozím* řádku je její *závěr*. Řádky uvnitř fantazie navíc pro přehlednost odsadíme.

Pravidlo fantazie si názorně objasníme na příkladu. Jako předpoklad vezmeme řetězec **P**. (**P** shodou okolností *není* teorém, ale to není podstatné. My pouze zkoumáme otázku „Co kdyby byl?“) A nyní si představme následující fantazii:

[	vnoř se do fantazie
P	předpoklad
∼∼P	závěr (odvozený pomocí pravidla dvojí vlnovky)
]	vynoř se z fantazie

Tato fantazie ukazuje, že:

Pokud by **P** byl teorém, pak by **∼∼P** byl také teorém.

A my nyní tuto větu českého jazyka (tj. metajazyka) „vtěsnáme“ do řetězce formálního jazyka (tj. objektového jazyka): $\langle P \rightarrow \sim\sim P \rangle$. A to je náš první teorém výrokového počtu, který by nám měl napovědět, jaká je zamýšlená interpretace symbolu „→“.

Složitější odvození s využitím pravidla fantazie může vypadat například takto:

[	vnoř se
⟨**P** ∧ **Q**⟩	předpoklad
P	oddělení
Q	oddělení
⟨**Q** ∧ **P**⟩	spojení
]	vynoř se
⟨⟨**P** ∧ **Q**⟩ → ⟨**Q** ∧ **P**⟩⟩	pravidlo fantazie

Je důležité si uvědomit, že skutečný teorém se nachází pouze na posledním řádku. Vše ostatní je pouhá fantazie.

REKURZE A PRAVIDLO FANTAZIE

Rekurzivní termíny „vnoř se“ a „vynoř se“ (podobné termínům „vlož“/„vyber“ či PUSH/POP u zásobníků) napovídají, že pravidlo fantazie lze používat rekurzivně – lze vytvořit fantazii uvnitř fantazie, trojnásobně vnořenou fantazii atd. To znamená, že existují různé „úrovně reality“, stejně jako v případě do sebe vnořených příběhů nebo filmů. Jestliže se vynoříme z nějakého „filmu ve filmu“, máme na okamžik pocit, jako kdybychom vstoupili do reálného světa, přestože se stále nenacházíme úplně na vrcholu, tedy v pravé realitě. Podobně, pokud se vynoříme z „fantazie uvnitř fantazie“, ocitneme se v „reálnějším“ světě, než ve kterém jsme byli předtím, ale nikoliv v pravé realitě.

Zavedeme nyní pravidlo, pro které analogie s příběhy a filmy zase tolik neplatí. Nápis „Kouření zakázáno“ uvnitř budovy kina se netýká postav vystupujících ve filmu – zákaz nelze přenést z reálného světa do fantazijního světa filmu. Avšak ve výrokovém počtu je tomu jinak. V něm je přenos z reálného světa do světa fantazie povolen; dokonce je povolen i přenos z fantazie do jejích vnitřních fantazií. Formálně toto pravidlo vyjádříme následovně:

PRAVIDLO PŘENOSU: Jsme-li uvnitř nějaké fantazie, můžeme do ní přenést a v ní využít jakýkoliv teorém z „reality“ o úroveň výše.

Funguje to zkrátka tak, jako kdyby se nápis „Kouření zakázáno“ v kině týkal nejen diváků, ale i všech postav ve filmu, a také všech postav ve vícenásobně vnořených filmech. (Zde je namístě důležité varování. Jakýkoliv přenos v opačném směru je nepřípustný: Teorémy uvnitř fantazie nemůžeme exportovat vně této fantazie! Kdybychom to totiž dovolili, bylo by možné odvodit jakýkoliv řetězec. Stačilo by tento řetězec napsat na první řádek fantazie a pak ho vynést do reálného světa.)

Na následujícím příkladu předvedeme, jak používáme pravidlo fantazie rekurzivním způsobem a jak při tom využíváme pravidlo přenosu:

[	vnoř se
P	předpoklad vnější fantazie
[	znovu se vnoř
Q	předpoklad vnitřní fantazie
P	přenos P do vnitřní fantazie
⟨P ∧ Q⟩	spojení
]	vynoř se z vnitřní fantazie zpět do vnější fantazie
⟨Q → ⟨P ∧ Q⟩⟩	pravidlo fantazie
]	vynoř se z vnější fantazie zpět do reálného světa!
⟨P → ⟨Q → ⟨P ∧ Q⟩⟩⟩	pravidlo fantazie

Abychom zvýraznili hierarchii jednotlivých „úrovní reality“, odsadili jsme vnější fantazii jednou a vnitřní fantazii dvakrát. Pravidlo fantazie lze chápat také tak, že nám umožňuje výsledek úvah *o* systému vložit *do* systému. Konkrétně se na výsledný teorém $\langle x \rightarrow y \rangle$ můžeme dívat tak, že uvnitř systému reprezentuje výrok o systému „Jestliže *x* je teorém, pak také *y* je teorém“. Zkrátka a dobře, zamýšlená interpretace řetězce ⟨P → Q⟩ je „jestliže P, pak Q“ neboli „z P vyplývá Q“.

OBRÁCENÉ PRAVIDLO FANTAZIE

Celý dialog Lewise Carrolla se točí kolem tvrzení „jestliže-pak“, ve kterých se vždy z určitého předpokladu dovozuje nějaký závěr. Neustále se opakuje stejná situace: pan Želva souhlasí s předpokladem i s celým tvrzením „jestliže-pak“, avšak navzdory usilovnému Achillovu přesvědčování nechce uznat závěr. Následující pravidlo nám umožní provádět ve výrokovém počtu právě to, co pan Želva dělat odmítá.

PRAVIDLO ODLOUČENÍ: Jestliže *x* a $\langle x \rightarrow y \rangle$ jsou teorémy, pak *y* je také teorém.

Poznamenejme, že pravidlu odloučení se často říká také „modus ponens“ a pravidlu fantazie „věta o dedukci“.

ZAMÝŠLENÁ INTERPRETACE SYMBOLŮ

V tomto okamžiku již můžeme odkrýt karty a prozradit (pokud ještě není zřejmý) „význam“ zbývajících symbolů našeho systému. Chování symbolu „∧“ je izomorfní s chováním slova „a“, tak jak ho známe z jeho každodenního používání. Symbol „∼“ reprezentuje slovo „ne“ – je to formální verze negace (záporu). Lomené závorky „⟨“ a „⟩“ mají velmi podobnou funkci jako závorky, které známe ze standardní algebry – seskupují několik po sobě jdoucích symbolů do jednoho celku. Je tady však jeden rozdíl – zatímco v algebře můžeme v rámci jejích pravidel závorky vkládat nebo je naopak vynechávat různými způsoby, ve formálním systému takovou volnost nepřipouštíme. Symbol „∨“ reprezentuje slovo „nebo“ (podle prvního písmena ve slově „vel“, což je latinsky „nebo“). Je třeba upozornit, že slovo „nebo“ zde chápeme jako tzv. *inkluzivní* (nevylučující) „nebo“, to znamená, že $\langle x \vee y \rangle$ interpretujeme jako „buď *x*, nebo *y*, nebo obojí“.

Jediné, co jsme dosud neinterpretovali, jsou atomy. Atom je výjimečný tím, že nemá jedinou interpretaci – může reprezentovat *jakoukoliv* větu v přirozeném jazyce (s podmínkou, že v rámci jednoho odvození musí být atom ve všech řetězcích interpretován toutéž větou). Například dobře utvořený řetězec ⟨P ∧ ∼P⟩ můžeme interpretovat jako souvětí:

Tato mysl je Buddha a tato mysl není Buddha.

Nyní se vrátíme k teorémům, které jsme doposud odvodili, a budeme je interpretovat, přičemž atomu P ponecháme interpretaci z předchozího příkladu. Jako první jsme odvodili teorém ⟨P → ∼∼P⟩, pro který dostaneme následující interpretaci:

Jestliže tato mysl je Buddha,
pak neplatí, že tato mysl není Buddha.

Stojí za povšimnutí, jak jsme v tomto souvětí vyjádřili dvojí negaci. Dvojnásobné použití negace působí v každém přirozeném jazyce poněkud neohrabaně; my jsme se s tím vypořádali tak, že jsme negace vyjádřili dvěma různými způsoby. Jako druhý příklad si vezmeme teorém ⟨⟨P ∧ Q⟩ → ⟨Q ∧ P⟩⟩. Interpretujeme-li Q jako větu „Toto semínko váží tři kila", pak tento teorém říká:

Jestliže tato mysl je Buddha a toto semínko váží tři kila,
pak toto semínko váží tři kila a tato mysl je Buddha.

Třetí teorém byl ⟨P → ⟨Q → ⟨P ∧ Q⟩⟩⟩. Ten interpretujeme jako následující souvětí, ve kterém jedno tvrzení „jestliže-pak" je vnořené do jiného tvrzení „jestliže-pak":

Jestliže tato mysl je Buddha,
pak platí že, jestliže toto semínko váží tři kila,
pak tato mysl je Buddha a toto semínko váží tři kila.

Čtenáři zřejmě neuniklo, že uvedené interpretace teorémů tvrdí absolutně triviální a samozřejmé skutečnosti. (Někdy jsou teorémy natolik samozřejmé, že vyznívají poněkud prázdně a paradoxně i matou; mohou dokonce vyvolat dojem, že jsou chybné!). Z tohoto hlediska nepůsobí možnost jejich odvození ve formálním systému nijak impozantně. Na druhé straně si musíme uvědomit, že existuje mnoho nepravdivých tvrzení, a my jsme žádné z nich neodvodili. Systém výrokové logiky elegantně kráčí od jedné pravdy ke druhé a bezpečně se vyhýbá nepravdivým tvrzením. Připomíná člověka, který chce zůstat suchý, a proto pečlivě našlapuje na kameny v potoce. Jeho pohyb sleduje uspořádání kamenů, ať už je jakkoliv komplikované. Úžasné na tom je, že ve výrokovém počtu se vše odehrává čistě *typograficky*. „Tam uvnitř" není nikdo, kdo by přemýšlel o *významu* jednotlivých řetězců. Odvozujeme mechanicky, bezmyšlenkovitě, ustrnule, dokonce jakoby přihlouple.

ÚPLNÝ SEZNAM PRAVIDEL

Nyní uvedeme souhrnnou tabulku všech pravidel výrokového počtu. Obsahuje i tři nová pravidla, kterými jsme se v předchozím výkladu dosud nezabývali:

PRAVIDLO SPOJENÍ: Jestliže x a y jsou teorémy, pak řetězec $\langle x \wedge y \rangle$ je také teorém.

PRAVIDLO ODDĚLENÍ: Jestliže $\langle x \wedge y \rangle$ je teorém, pak řetězce x a y jsou také teorémy.

PRAVIDLO DVOJÍ VLNOVKY: Z jakéhokoliv teorému můžeme odstranit řetězec „∼∼". Do jakéhokoliv teorému můžeme vložit řetězec „∼∼" za předpokladu, že nově vzniklý řetězec je dobře utvořený. V obou případech je výsledný řetězec také teorém.

PRAVIDLO FANTAZIE: Jestliže za předpokladu, že x je teorém, můžeme odvodit y, pak $\langle x \rightarrow y \rangle$ je také teorém.

PRAVIDLO PŘENOSU: Jsme-li uvnitř nějaké fantazie, můžeme do ní přenést a v ní využít jakýkoliv teorém z „reality“ o jednu úroveň výše.

PRAVIDLO ODLOUČENÍ: Jestliže x a $\langle x \to y\rangle$ jsou teorémy, pak y je také teorém.

PRAVIDLO TRANSPOZICE: Výrazy $\langle x \to y\rangle$ a $\langle \sim y \to \sim x\rangle$ jsou zaměnitelné.

DE MORGANOVO PRAVIDLO: Výrazy $\langle \sim x \wedge \sim y\rangle$ a $\sim\langle x \vee y\rangle$ jsou zaměnitelné.

PRAVIDLO PROHOZENÍ: Výrazy $\langle x \vee y\rangle$ a $\langle \sim x \to y\rangle$ jsou zaměnitelné.

Zaměnitelností výrazů v posledních třech pravidlech míníme toto: Jestliže jeden z obou výrazů je teorém nebo je částí nějakého teorému, pak jej můžeme zaměnit druhým z obou výrazů, a výsledný řetězec je opět teorém. (Například poslední pravidlo s oblibou používal zneuznaný logik J. C., rodák z Liptákova. K mnoha svým geniálním důkazům údajně dospěl právě díky rafinovanému „prohazování“ symbolů $\vee$ a $\to$.) Znovu připomínáme, že symboly „x“ a „y“ v pravidlech vždy zastupují dobře utvořené řetězce.

ZDŮVODNĚNÍ PRAVIDEL

Dříve než se pustíme do dalšího odvozování teorémů, zastavíme se krátce u tří nových pravidel. Čtenář je pravděpodobně sám schopen tato pravidla odůvodnit, proto zde uvedeme pouze několik příkladů.

Pravidlo transpozice výslovně popisuje, jak můžeme otočit podmínkové tvrzení (při běžném hovoru to často děláme bez přemýšlení). Například „tvrzenzení“

Když ji studuješ, jsi daleko od pravé Cesty

znamená to samé, jako

Jsi-li blízko pravé Cesty, pak ji nestuduješ.

De Morganovo pravidlo předvedeme na známém tvrzení „Vlajka se nehýbe a vítr se nehýbe“. Jestliže P označuje „Vlajka se hýbe“ a Q označuje „Vítr se hýbe“, pak uvedené tvrzení můžeme symbolicky zapsat jako $\langle \sim x \wedge \sim y\rangle$. A tento řetězec můžeme podle De Morganova pravidla zaměnit řetězcem $\sim\langle$P $\vee$ Q$\rangle$, který interpretujeme jako „Není pravda, že vlajka se hýbe nebo vítr se hýbe“. Těžko popírat, že toto trvrzenzení zení docela zenzumně.

Pravidlo prohození si ilustrujeme na větě „Mrak visí nad horou nebo měsíční svit prolíná vlny na jezeře“. Řekněme, že je to tesklivý povzdech zenového mistra, který si ve vzpomínkách vybavuje obrázek známého jezera, avšak nemůže spatřit skutečné jezero. A teď si držte klobouky – pravidlo prohození umožňuje zaměnit toto tvrzení větou: „Jestliže mrak nevisí nad horou, pak měsíční svit prolíná vlny na jezeře“. Je pravda, že tato záměna nás k osvícení asi nijak zvlášť nepřiblíží; nic lepšího nám však výrokový počet nenabízí.

HRAJEME SI SE SYSTÉMEM

Nyní se vrátíme k teorému $\langle P \rightarrow {\sim}{\sim}P \rangle$ a budeme dále odvozovat pomocí pravidel výrokového počtu:

$\langle P \rightarrow {\sim}{\sim}P \rangle$	dříve odvozený teorém
$\langle {\sim}{\sim}{\sim}P \rightarrow {\sim}P \rangle$	transpozice
$\langle {\sim}P \rightarrow {\sim}P \rangle$	dvojí vlnovka
$\langle P \vee {\sim}P \rangle$	prohození

Dostali jsme nový teorém $\langle P \vee {\sim}P \rangle$, který můžeme interpretovat jako:

Tato mysl je Buddha, anebo tato mysl není Buddha.

Znovu platí, že i když ani tento teorém neříká nic převratného, je alespoň pravdivý.

ČÁSTEČNÁ INTERPRETACE

Je zcela přirozené, že když čteme nahlas nějaký teorém výrokového počtu, interpretujeme všechny symboly kromě atomů. Takové interpretaci budeme říkat *částečná interpretace*. Například částečná interpretace $\langle P \vee {\sim}P \rangle$ je

P nebo ne P.

Přestože P není žádná konkrétní věta, částečně interpretovaný teorém zní pravdivě. My si totiž můžeme představit, že nějakou větu zvolíme, a tu za P dosadíme. Přitom struktura částečně interpretovaného teorému zaručuje, že ať už je naše volba jakákoliv, vždy dostaneme pravdivé tvrzení. A to je ústřední myšlenka výrokového počtu: pomocí jeho pravidel odvozujeme teorémy, které po částečné interpretaci mají charakter „univerzálně pravdivé věty“, čímž chceme říci, že po libovolně dokončené interpretaci bude vždy výsledkem pravdivé tvrzení.

GANTOVA SEKERA

Nyní se budeme věnovat náročnějšímu příkladu, který vychází ze zenovém koanu s názvem „Gantova sekera“. Koan začíná takto:

> Jednoho dne řekl Tokusan svému žáku Gantovi: „Mám dva mnichy, kteří zde jsou již mnoho let. Jdi a vyzkoušej je.“ Ganto vzal sekeru a zašel do chýše, kde oba mniši meditovali. Napřáhl sekeru a řekl: „Promluvíte-li, useknu vám hlavu, a když nepromluvíte, také vám useknu hlavu.“

„Promluvíte-li, utnu tento koan; a když nepromluvíte, také utnu tento koan.“ To říkám zase já, abychom měli možnost přeložit si něco z tohoto vyprávění do formálního jazyka. Jestliže P označuje tvrzení „promluvíte“ a Q označuje tvrzení „useknu vám hlavu“, potom řetězec $\langle \langle P \rightarrow Q \rangle \wedge \langle {\sim}P \rightarrow Q \rangle \rangle$ reprezentuje Gantovu hrdelní hrozbu. Co kdyby tato hrozba byla axiomem? Odpověď na tuto otázku nalezneme tím, že se vnoříme do fantazie.

(1)	[	vnoř se
(2)	$\langle\langle P \to Q\rangle \wedge \langle{\sim}P \to Q\rangle\rangle$	Gantův axiom (předpoklad vnější fantazie)
(3)	$\langle P \to Q\rangle$	oddělení
(4)	$\langle{\sim}Q \to {\sim}P\rangle$	transpozice
(5)	$\langle{\sim}P \to Q\rangle$	oddělení
(6)	$\langle{\sim}Q \to {\sim}{\sim}P\rangle$	transpozice
(7)	[	znovu se vnoř
(8)	$\quad{\sim}Q$	předpoklad vnitřní fantazie
(9)	$\quad\langle{\sim}Q \to {\sim}P\rangle$	přenos řádku 4
(10)	$\quad{\sim}P$	odloučení
(11)	$\quad\langle{\sim}Q \to {\sim}{\sim}P\rangle$	přenos řádku 6
(12)	$\quad{\sim}{\sim}P$	odloučení (řádky 8 a 11)
(13)	$\quad\langle{\sim}P \wedge {\sim}{\sim}P\rangle$	spojení
(14)	$\quad{\sim}\langle P \vee {\sim}P\rangle$	De Morgan
(15)	]	vynoř se z vnitřní fantazie
(16)	$\langle{\sim}Q \to {\sim}\langle P \vee {\sim}P\rangle\rangle$	pravidlo fantazie
(17)	$\langle\langle P \vee {\sim}P\rangle \to Q\rangle$	transpozice
(18)	[	znovu se vnoř
(19)	$\quad{\sim}P$	předpoklad vnitřní fantazie (a zároveň její závěr!)
(20)	]	vynoř se z vnitřní fantazie
(21)	$\langle{\sim}P \to {\sim}P\rangle$	pravidlo fantazie
(22)	$\langle P \vee {\sim}P\rangle$	prohození
(23)	Q	odloučení (řádky 22 a 17)
(24)	]	vynoř se z vnější fantazie

Tento příklad ukazuje sílu výrokového počtu. Potřebovali jsme totiž jen o málo více než dvě desítky kroků, abychom odvodili Q: Mniši budou sťati. (Je symbolické, že závěrečným krokem, který rozhodl o bezpodmínečném odloučení jejich hlavy od těla, bylo pravidlo odloučení…) Pokračovat ve vyprávění koanu se zdá být zbytečné – vždyť už víme, co bude následovat… Já nicméně změním své rozhodnutí a koan neutnu; je to koneckonců pravý zenový koan. Příběh pokračuje takto:

> Oba mniši pokračovali v meditaci, jako by Ganto nic neřekl. Ganto pustil sekeru a řekl: „Jste správní studenti zenu." Vrátil se k Tokusanovi a vylíčil mu, co se stalo. „Rozumím tvému pohledu," souhlasil Tokusan, „ale řekni mi, jaký je jejich pohled?" „Tozan by je tu asi nechal," odpověděl Ganto, „ale Tokusan by je tu nechávat neměl."

Rozumíte mému pohledu? A zenovému také?

EXISTUJE ROZHODOVACÍ PROCEDURA PRO TEORÉMY?

Pomocí pravidel výrokového počtu odvozujeme tvrzení, která jsou pravdivá ve všech myslitelných světech. Proto tato tvrzení (teorémy) znějí prostoduše a zdá se, že jsou zcela bezobsažná. Z tohoto pohledu by se odvozování ve výrokovém počtu mohlo jevit jako ztráta času, protože vše, k čemu nakonec dojdeme, je triviální. Na druhé straně, pravidla výrokového počtu určují *formu* tvrzení, která jsou univerzálně pravdivá. A to vrhá nové světlo na povahu základních pravd o světě – tyto pravdy jsou svým způsobem *uspořádané*, protože je můžeme vytvářet pomocí jednoho souboru typografických pravidel. Obrazně řečeno, základní pravdy o světě jsou všechny ušity podle „stejného kopyta“. Stojí za zamyšlení, zda něco podobného neplatí i pro zenové koany: nešlo by je také vytvářet podle nějakého souboru typografických pravidel?

Nyní však nastolíme jinou závažnou otázku – problém rozhodovací procedury. Existuje nějaká metoda, jak mechanicky rozeznat teorémy? Pokud by existovala, pak by teorémy výrokového počtu tvořily množinu, která by byla nejen rekurzivně spočetná, ale dokonce rekurzivní. Ukazuje se, že odpověď je kladná. Jedna zajímavá rozhodovací procedura se nazývá metoda pravdivostních tabulek. Nebudeme ji zde vysvětlovat, neboť by nás to odvedlo příliš daleko od tématu. Čtenář nalezne popis této metody v každé standardní učebnici logiky. A jak je to se zenovými koany? Je vůbec myslitelná mechanická rozhodovací procedura, která by rozeznala pravé, nefalšované zenové koany?

VÍME, ŽE SYSTÉM JE BEZESPORNÝ?

Ukázali jsme si, jak interpretovat dobře utvořené řetězce výrokového počtu. Dosud jsme mlčky *předpokládali*, že když interpretujeme libovolný teorém, vždy dostaneme pravdivé tvrzení. Jak ale *víme*, že tomu tak opravdu je? Můžeme to dokázat? Neboli ptáme se, jestli v případě námi zamýšlené interpretace („∧“ interpretujeme jako „a“, atd.) jsme oprávněni mluvit o „pasivním významu“ symbolů. K tomuto problému lze zaujmout dvě krajní stanoviska, která nazveme „obezřetné“ a „lehkovážné“. Oba postoje si přiblížíme na rozhovoru dvou osob: paní Obezřetné a pana Lehkovážného.

Obezřetná: Měli bychom postupovat opatrně a uvážlivě. VĚDĚT, že všechny teorémy jsou při zamýšlené interpretaci pravdivé, budeme teprve tehdy, až to DOKÁŽEME.

Lehkovážný: Kdepak, je to úplně jinak. Ono je totiž ZŘEJMÉ, že všechny interpretované teorémy jsou pravdivé. Jestli o tom pochybujete, podívejte se ještě jednou na odvozovací pravidla systému. Poznáte, že s každým symbolem zacházíme stejným způsobem, jakým zacházíme se slovem, které daný symbol reprezentuje. Například pravidlo spojení nutí symbol ∧ chovat se tak, jak se chová slovo „a“ v běžné řeči; pravidlo odloučení nutí symbol → chovat se tak, jak se chová podmínková vazba „jestliže-pak“; atd. Pokud se nechcete chovat jako pan Želva, musíte uznat, že každé pravidlo stanoví určitý vzorec, který sama používáte při svém uvažování. Pokud důvěřujete svému způsobu uvažování, MUSÍTE věřit, že všechny interpretované teorémy jsou pravdivé. Tak to vidím já a nepotřebuji žádný důkaz. Jestliže si myslíte, že nějaký interpretovaný teorém může být nepravdivý, pak vlastně připouštíte, že některé odvozovací pravidlo je chybné. V tom případě na něj ukažte prstem.

Obezřetná: Nemohu ukázat na konkrétní pravidlo, protože mi nepřipadá, že by některé bylo chybné. Přesto si však dokážu představit následující scénář. Budete odvozovat pomocí odvozovacích pravidel a dospějete například k teorému *x*. Já budu mezitím také odvozovat a dostanu teorém ~*x*. Dovedete si to představit?

Lehkovážný: Dobře, předpokládejme, že se to stane. Proč by vás to ale mělo znepokojovat? Anebo to řeknu ještě jinak. Představte si, že si oba budeme hrát s MIU-systémem, já odvodím teorém *x* a vy odvodíte teorém *x*U. Dovedete si to představit?

Obezřetná: Samozřejmě, vždyť třeba MI a MIU jsou teorémy MIU-systému.

Lehkovážný: A znepokojuje vás to?

Obezřetná: Samozřejmě, že ne. Váš příklad je ale poněkud směšný, protože MI a MIU nejsou vzájemně ROZPORNÉ, kdežto řetězce *x* a ~*x* JSOU ve výrokovém počtu vzájemně rozporné.

Lehkovážný: To je pravda, ovšem pouze za předpokladu, že se rozhodnete interpretovat „~" jako „ne". Co vás ale vede k přesvědčení, že „~" se má interpretovat jako „ne"?

Obezřetná: Řekla bych, že k této interpretaci mě vedou samotná pravidla výrokového počtu. Když se na ně podíváte, zjistíte, že jediná myslitelná interpretace „~" je „ne", že jediná myslitelná interpretace „∧" je „a", atd.

Lehkovážný: Jinými slovy jste přesvědčena, že pravidla zachycují význam těchto slov?

Obezřetná: Ano, je to tak.

Lehkovážný: A přesto jste stále ochotna pohrávat si s myšlenkou, že *x* i ~*x* by mohly být zároveň teorémy? A proč si potom nepohrávat s myšlenkami, že ježci jsou žáby, že 1 se rovná 2 nebo že měsíc je ze zeleného sýra? Pokud jde o mě, já rozhodně nehodlám přemítat o tom, jestli základní postupy mých myšlenkových pochodů jsou správné, nebo chybné. Kdybych s tím začal, musel bych se dále ptát, zda samotné způsoby mého uvažování o této záležitosti jsou v pořádku, a nakonec bych se v takových úvahách beznadějně zamotal.

Obezřetná: Uznávám, že vaše argumenty jsou přesvědčivé… přesto bych ráda viděla DŮKAZ, že všechny interpretované teorémy jsou pravdivé, případně že *x* a ~*x* nemohou být zároveň teorémy.

Lehkovážný: Vy tedy chcete důkaz. To ale podle mě znamená, že chcete být přesvědčena o bezespornosti výrokového počtu více, než jste přesvědčena o bezespornosti svého zdravého rozumu. Jakýkoliv představitelný důkaz by použil myšlenkové postupy ještě komplikovanější, než je samotný výrokový počet. A co bychom pak vlastně dokázali? Vaše touha po důkazu bezespornosti výrokového počtu mi připomíná někoho, kdo se učí český jazyk, a přitom tvrdošíjně požaduje slovník, který by všechna jednoduchá slova vysvětloval pomocí slov složitějších.