

VELKÁ OTÁZKA

Na počátku byla snaha trojice našich pracovníků najít řešení klasického matematického problému, totiž „problému obchodního cestujícího“, se kterým si dosud neporadili lidé ani počítače.

Tisková zpráva IBM, 1964.¹

V roce 1962 spustila společnost Procter & Gamble reklamní kampaň, která vyvolala mezi matematiky velký zájem. Součástí kampaně byla soutěž o 10 000 amerických dolarů, což v té době stačilo ke koupi domu. Ocitujme z tehdejších pravidel:

Přestavte si, že Toody a Muldoon chtějí cestovat po Spojených státech, navštívit každé z 33 míst na soutěžní mapě a přitom ujet co nejkratší vzdálenost. Vaším úkolem je naplánovat trasu, která bude postupovat od města k městu a bude co do vzdálenosti nejkratší okružní cestou z Chicaga zase zpět do Chicaga.

Připomeňme pro souvislost, že Toody a Muldoon jsou dvě postavy z oblíbeného amerického televizního seriálu *Car 54*. Úkol projet 33 měst je příkladem *problému obchodního cestujícího*, který budeme zkracovat jako *TSP* (z anglického „traveling salesman problem“). V obecné podobě zní problém tak, že je dána množina měst a vzdáleností mezi každou dvojicí měst. Cílem je nalézt nejkratší cestu, která projde všemi městy a vrátí se zpět do výchozího místa.

Je takový obecně formulovaný problém snadný, těžký, nebo snad neřešitelný? Krátká odpověď zní, že vlastně nikdo neví. To dodává tomuto nejslavnějšímu problému diskrétní matematiky punc tajemnosti i lákavosti. A v sázce je mnohem víc než jeden problém. TSP je kamínkem z mnohem větší mozaiky, která se dotýká hranic výpočtové složitosti a lidského poznání obecně. Jestliže máte chuť a kuráž, pak stačí ostrá tužka a čistý list papíru a můžete si vyzkoušet, jak problém řešit. Možná uděláte kvantový skok v chápání světa, ve kterém náš příslovečný obchodní zástupce cestuje.



Obr. 1.1 Originální plakát k soutěži inspirované seriálem *Car 54*. Obrázek poskytla společnost Procter & Gamble.

CESTA PO SPOJENÝCH STÁTECH

I přes svou hroznou pověst je TSP z určitého úhlu pohledu vlastně jednoduchý: vždyť počet všech cest mezi městy je vždy konečný. Hypotetický matematik z roku 1962 mohl přece zkontrolovat všechny možné cesty, najít tu nejkratší, zaslat řešení firmě Procter & Gamble a počkat si na šek na 10 000 amerických dolarů. Jednoduchá a bezchybná strategie. Je tu však zádrhel. Počet všech možných cest je možná příliš velký na to, aby je bylo možné jednu po druhé zkontrolovat.

Už v roce 1930 si toho všiml australský matematik a ekonom Karl Menger, který jako první rozšířil povědomí o složitosti TSP mezi matematickou veřejností: „Tento problém lze samozřejmě řešit tak, že vyzkoušíme všech konečně mnoho možností. Ovšem dosud nejsou známa žádná pravidla, jak určit minimální počet kroků, které je třeba provést (kromě triviální horní

1. VELKÁ OTÁZKA

meze, která je určena počtem permutací všech bodů).“² Zkusme věc rozebrat. Nejprve si všimněme, že každou cestu lze reprezentovat tak, že napíšeme města v určitém pořadí. Označme například všech 33 měst v soutěži písmeny *A* až *Z* a číslicemi 1 až 7: *A* bude označovat Chicago, *B* Wichitu a tak dále. Pak následující řetězec písmen a číslic popisuje jednu konkrétní cestu:

ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ1234567.

Každé cestě tak odpovídá nějaký řetězec písmen a číslic tvořený našimi 33 symboly. Každý takový řetězec se nazývá *permutací* symbolů. Řetězec symbolů je cyklický (tj. od posledního symbolu se vracíme k prvnímu). To znamená, že každou konkrétní cestu můžeme zapsat 33 způsoby – podle toho, ve kterém městě začneme. Abychom se vyhnuli různým zápisům pro stejnou cestu, můžeme se rozhodnout, že řetězec bude vždy začínat písmenem *A*. Pak nám zbývá 32 možností, jak zvolit druhé město, 31 možností, jak zvolit třetí město, a tak dále. Celkem tedy dostáváme $32 \times 31 \times 30 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$ možných cest. Toto číslo označuje počet všech permutací 32 různých objektů, což je $32!$, 32 *faktoriál*.

V soutěži Procter & Gamble si můžeme ušetřit práci postřehem, že vzdálenost mezi Chicagem a Wichitou je stejná jako vzdálenost mezi Wichitou a Chicagem a že to platí pro všechny další dvojice měst. Díky této symetrii nezáleží, ve kterém směru cestujeme – řetězec

ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ1234567

je pro naše účely stejný jako obrácený řetězec

7654321ZYXWVUTSRQPONMLKJIHGFEDCBA.

Stačí tedy prozkoumat polovinu všech možných permutací: $32!/2$. Než se rozhodnete vzít tužku a zkusit jednotlivé trasy, uvědomte si, že byste museli prozkoumat přesně

131 565 418 466 846 765 083 609 006 080 000 000

různých cest.

V dnešní době by to samozřejmě nikdo nezkoušel ručně, ale spolehl by se na počítač. Tak zvolme nějaký hodně výkonný – třeba IBM Roadrunner Cluster Ministerstva energetiky USA za 133 000 000 dolarů. Jedná se o stroj se 129 600 procesory, který byl s výkonem 1 457 bilionů aritmetických operací za sekundu v roce 2009 v čele tabulky 500 nejrychlejších počítačů

na světě.³ Předpokládejme pro jednoduchost, že počítači zabere jen jednu aritmetickou operaci, aby zkontroloval jednu cestu. Pak by řešení našeho problému obchodního cestujícího o 33 městech trvalo počítači Roadrunner 28 bilionů let; což je hodně, vzhledem k tomu, že se odhaduje, že náš vesmír je jen 14 miliard let starý. Není divu, že Menger nebyl spokojen s řešením, které se spoléhá na hrubou sílu.

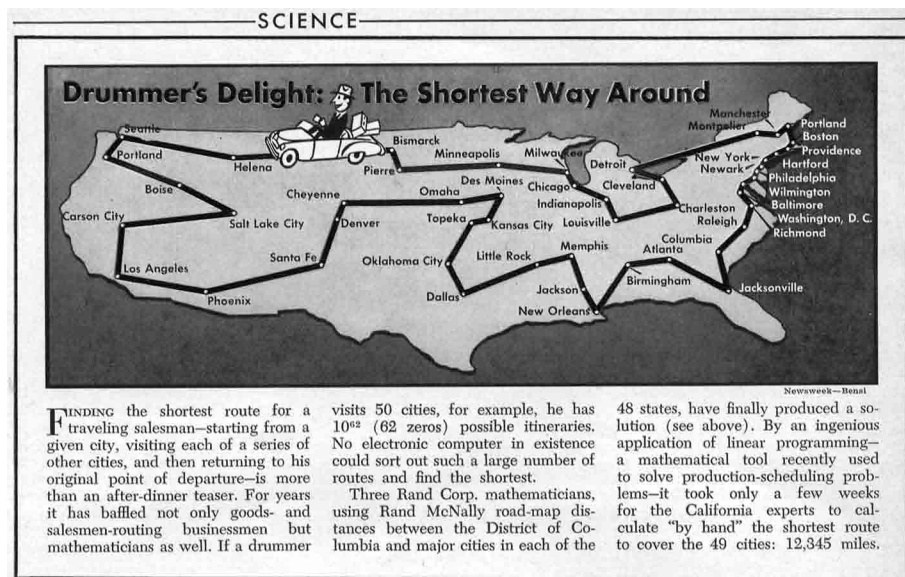
Když uvažujeme o důsledcích naší rychlé analýzy, nezapomeňme, že Menger píše, že pravidla, která by nám umožňovala řešit problém rychleji, nejsou známa – nikoli, že žádná taková neexistují. Tuto pozici shrnuje elegantním způsobem John Little ve svém komentáři k soutěži: „Nemálo lidí, možná těch s přílišným vzděláním, napsalo firmě, že vyřešit tento problém není možné: zajímavá chyba v chápání současných možností matematiky.“⁴ Little se svými kolegy dále představuje v článku průlomovou techniku v hledání způsobů řešení TSP, ale ani oni nedokázali problém s 33 městy skutečně vyřešit. Zdálo se, že nikdo v celé zemi není schopen najít cestu, o které by se s jistotou dalo tvrdit, že je tou nejkratší, kterou Toody a Muldoon mohou zvolit.

Problém 33 měst tedy zůstal tenkrát nevyřešen, ale už v roce 1954 tu byla skupina matematiků, která by si s ním poradila – kdyby se o to pokusili. Místo toho se pustili do řešení ještě složitějšího problému, totiž nalezení cesty mezi 48 městy včetně hlavního města Washingtonu. O tomto konkrétním problému se mezi matematiky mluvilo už od 30. let 20. století a jeho řešení vyšlo v roce 1954 v časopisu *Newsweek*.⁵

Obchodní cestující musí vyjet z určitého města, navštívit popořadě všechna další města a potom se vrátit tam, odkud vyjel, a to nejkratší cestou. Není to problém, který byste vyřešili po večeři místo křížovky. Už několik let trápí nejenom obchodní cestující, ale i matematiky. V příkladě obchodního cestujícího, který má navštívit 48 měst, existuje 10^{62} (číslo s 62 nulami) možných tras. Žádný současný počítač nezvládne všechny trasy propočítat a určit tu nejkratší.

Tři matematici z Rand Corp. si vzali k ruce silniční mapu, která uvádí vzdálenosti mezi velkými městy ve všech 48 státech, a nakonec našli řešení. Díky vynalézavé aplikaci lineárního programování (matematický nástroj, který se v poslední době užívá k řešení problémů s plánováním výroby) trvalo kalifornským matematikům jen několik týdnů, než pouze s tužkou a papírem našli nejkratší cestu mezi 48 městy. Odpověď zní 19 863 km.

Zmínění odborníci z Kalifornie byli George Dantzig, Ray Fulkerson a Selmer Johnson. Pracovali v prestižním výzkumném centru, které se věnovalo no-

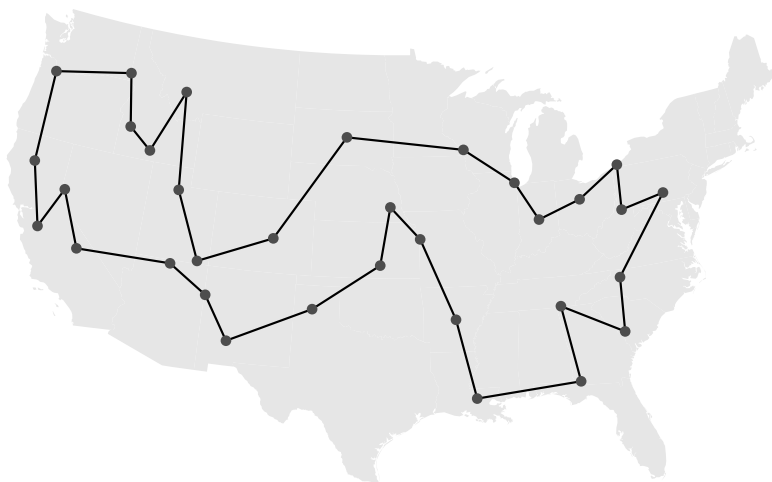


Obr. 1.2 Drummer's Delight. *Newsweek*, 26. července 1954, str. 74.

vému oboru matematického programování a které mělo své sídlo v RAND Corporation v Santa Monice v USA.

Jejich metoda obsahuje několik krásných matematických myšlenek, se kterými se seznámíme na dalších stránkách. Od tohoto okamžiku budeme místo neurčitěho slova „metoda“ používat slovo „důkaz“ („důkazem“ jsou např. všechny úvahy, které si pamatujete ze školy, když jste se učili geometrii). Jejich důkaz ukazuje, že žádná cesta mezi 48 městy nemůže být kratší než 19 863 km. Protože navíc našli cestu, která měří přesně 19 863 km, byla tato konkrétní instance TSP jednou provždy vyřešena.

Dantzig a jeho skupina se soutěže o 10 000 dolarů nezúčastnili, ale je jisté, že by počítačová implementace jejich metody problém 33 měst vyřešila snadno. Nejkratší cesta pro Toodyho a Muldoona je vyznačena na obrázku 1.3. I když v roce 1962 nikdo nevěděl najisto, že se jedná o nejkratší cestu, řada soutěžících přesně tuto trasu našla a jako řešení zaslala do soutěže. Mezi těmi, kdo se dělili o první místo v soutěži, byli matematici Robert Karg a Gerald Thompson, kteří vytvořili heuristickou strategii založenou na náhodném výběru, která našla vítězné řešení.⁶ Celý příběh má šťastné zakončení, alespoň pro matematickou komunitu: aby vyhrál pouze jeden soutěžící, měli ti, kdo



Obr. 1.3 Optimální cesta pro soutěž Car 54.

se dělili o první místo, sepsat krátkou esej o výhodách jednoho z výrobků firmy Procter & Gamble. Thompsonův text o mýdlových prostředcích dostal hlavní cenu.

NEŘEŠITELNÝ PROBLÉM?

Tým z RAND Corp. sice vyřešil problém cesty přes 48 států, ale nevyřešil samotnou otázku TSP. Úspěšné vyřešení jedné, byť složité úlohy neznamená, že je tím vyřešen celý problém. Kdyby v Las Vegas přijímali sázky na to, zda se problém obecně vyřeší, asi bychom zjistili, že většina matematiků sází na to, že TSP se nikdy úplně nevyřeší. Co přesně tím myslíme? Řešením budeme rozumět efektivní *algoritmus*, tj. posloupnost kroků, jejichž provedení vždy vede k nalezení optimální cesty, bez ohledu na to, jak složité je zadání úlohy. Nalezení cesty v jednom konkrétním případě nestačí.

Vědecko-fantastická povídka *Antibodies* od Charlese Strosse popisuje hrozné důsledky, které by mohlo mít nalezení efektivního řešení TSP.⁷ Doufejme, že by nebyly tak fatální jako v povídce *Antibodies*, ale určitě by se svět obrátil obrazně řečeno naruby. Proč naruby? Začněme několika citáty.

„Je pravděpodobné, že k úspěšnému vyřešení problému bude potřeba najít zcela nový přístup k problematice. Možná ani žádná obecná metoda neexistuje; i důkaz toho, že taková metoda neexistuje, by ale byl cenný.“ *Merrill Flood, 1956.*⁸

1. VELKÁ OTÁZKA

„Má hypotéza je, že žádný dobrý algoritmus pro řešení problému obchodního cestujícího neexistuje.“ *Jack Edmonds*, 1967.⁹

„Věty dokázané v tomto článku naznačují, i když nikoli implikují, že tyto problémy, stejně jako jim podobné, zůstanou navždy nevyřešeny.“ *Richard Karp*, 1972.¹⁰

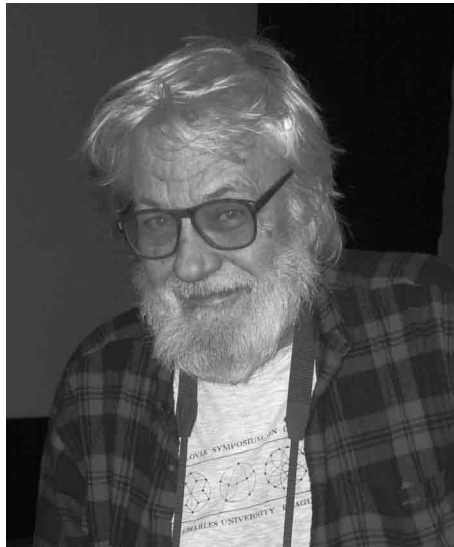
Autoři těchto vět jsou tři výrazné postavy, které byly tak či onak spojeny s problémem obchodního cestujícího. Merrill Flood rozšiřoval povědomí o důležitosti problému ve 40. letech 20. století a byl to zejména on, kdo v ostatních matematicích probudil zájem o tuto otázku. Když rozebíral stav problému v roce 1956, vzal jako první v potaz možnost, že efektivní metoda řešení neexistuje. Tuto pozici zastával také Jack Edmonds o dekádu později, který na hypotézu neřešitelnosti dokonce vsadil. Svůj názor obhajoval stručně: „Tato hypotéza je podle mě oprávněná ze stejného důvodu jako každá jiná: (1) Je to legitimní matematická možnost a (2) Neznám řešení.“ Ale tato slova jsou spíše určena k potrápení případného oponenta: Edmonds je jedním z předních matematiků 20. století a určitě měl hlubší důvody, aby vsadil peníze v neprospěch řešitelnosti TSP. O pět let později osvětlil pozadí této sázky velký informatik Richard Karp ve své knize, kde propojil TSP s množstvím dalších výpočetních problémů. Podrobnosti o Karpově teorii si necháme do kapitoly 9, teď uvedeme jen několik postřehů, které naznačují, že postavy z povídky *Antibodies* možná měly oprávněné obavy z řešení TSP.

Dobrý a špatný algoritmus

Když Edmonds používá sousloví „dobrý algoritmus“, míní tím, že dobrý je takový algoritmus, jenž dokáže vyřešit problém v čase, který pokládáme za přijatelný. To však není příliš přesná matematická definice, a proto musel pojem „dobrého algoritmu“ zpřesnit. Určitě nemůžeme očekávat, že každý příklad TSP se vyřeší řekněme za méně než minutu, ať už člověkem nebo strojem. Musíme alespoň připustit, že doba řešení narůstá s počtem měst. Jde o to rozhodnout, jaký nárůst je ještě přijatelný.¹¹

Označme symbolem n velikost problému - u problému obchodního cestujícího je to počet měst. Doba potřebná k přečtení seznamu měst roste přímo úměrně k n , a tak by někdo hodně náročný mohl požadovat, aby i doba k nalezení optimální cesty rostla přímo úměrně k n . Takový předpoklad by ale byl příliš optimistický.

Edmonds sám počítá s rychlejším než lineárním nárůstem, ale pomyslnou dělicí čáru mezi dobrým a špatným algoritmem dělá po hlubokém uvážení.



Obr. 1.4 Jack Edmonds, 2009. Fotografie poskytl Marc Uetz.

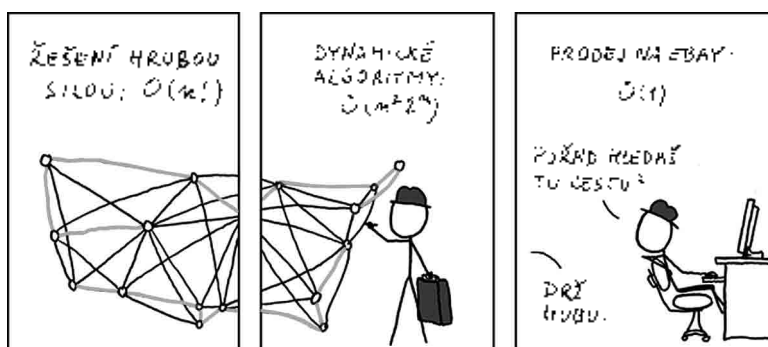
Dobry algoritmus je takový, který určitě provede svou práci v čase úměrném $k n^k$, kde k je nějaké přirozené číslo. Konstanta k může být skutečně libovolné přirozené číslo, např. 2, 3 nebo větší, ale musí být pevně fixováno: není povoleno, aby rostlo s n . Algoritmus s dobou běhu n^3 je tedy dobrý, zatímco hodnoty n^n a 2^n jsou špatné. Pro představu uvádíme v tabulce 1.1 dobu běhu algoritmu pro několik hodnot n , když předpokládáme, že počítač je schopen provést 10^9 instrukcí za sekundu. Když $n = 10$, běží i špatný algoritmus v rozumném čase. Ale určitě byste nechtěli použít algoritmus s hodnotou 2^n , když se n rovná 100.

	$n = 10$	$n = 25$	$n = 50$	$n = 100$
n^3	0,000 001 sekundy	0,000 02 sekundy	0,000 1 sekundy	0,001 sekundy
2^n	0,000 001 sekundy	0,03 sekundy	13 dní	40 bilionů let

Tabulka 1.1 Doba běhu počítače s rychlostí 10^9 operací za sekundu.

Edmondsova formalizace pojmu „dobry algoritmus“ nemusí vždy zcela souhlasit s naší intuicí. Algoritmus, který vyžaduje n^{1000} kroků, rozhodně není moc praktický, když chceme vyřešit úlohu se 100 městy. Zpřesnění rozdílu mezi dobrým a špatným algoritmem však umožnilo aplikaci mate-

1. VELKÁ OTÁZKA



Obr. 1.5 Problém obchodního cestujícího. Randall Munroe, xkcd.com.

matických metod na jinak neurčitě formulovanou otázku. Praxe ukazuje, že jakmile se potvrdí existence dobrého algoritmu, další snaha matematiků vede rychle k postupnému snížení konstanty k : většinou se najde algoritmus se složitostí úměrnou n^2 , n^3 nebo n^4 , což je již rychlost, která se hodí pro řešení úloh s velkými vstupy.

Ti, kteří by chtěli mít podobný algoritmus pro úlohu TSP, budou však zklamáni. Nejlepší dosud známá metoda, objevená v roce 1962, běží v čase úměrném $n^2 2^n$. I když to není dobrý algoritmus v našem smyslu, je toto číslo pořád podstatně menší než celkový počet cest s n body, který je roven $(n-1)!/2$. V jistém smyslu je to i částečná odpověď na otázku, kterou položil Karl Menger.

Třídy složitosti P a NP

Edmondsova dichotomie má své důsledky také pro výpočetní úlohy, které se rozdělují do tříd podle toho, zda pro ně existuje nebo neexistuje dobrý algoritmus. Třidu úloh, pro které takový algoritmus existuje, označujeme jako P.

Proč P a ne třeba D, jako „dobrý“? Matematici nebyly moc spokojeni s emotivním obsahem slova „dobrý“, a tak dali přednost dnes standardnímu označení *algoritmus běžící v polynomiálním čase* nebo krátce *polynomiální algoritmus*. Odtud, jako „polynomiální“.

Třída P má sice přesnou definici, ale už nemusí být lehké určit, zda do ní konkrétní problém patří. Klidně to může být tak, že problém obchodního cestujícího je ve třídě P, ale my jsme dosud neobjevili algoritmus, který by to prokázal. Dobrou zprávou je, že alespoň poznáme dobrou cestu, když nám

ji někdo ukáže. Uvažujme takto: předpokládejme, že naším úkolem je nalézt cestu kratší než třeba 100 km. Když nám někdo předloží řešení, můžeme snadno zkontrolovat, zda je navrhovaná cesta skutečně kratší než 100 km. Díky této vlastnosti je TSP prvkem třídy, které se říká NP a která se skládá z takových úloh, jejichž řešení lze v polynomiálním čase *zkontrolovat*. Dvojice písmen NP je zkratkou pro *nedeterministický polynomiální*. I přes své trochu tajemné označení je to přirozeně vymezená třída problémů: je přirozené, že bychom měli být schopni alespoň zkontrolovat, zda navržené řešení splňuje výchozí požadavky.

Velká otázka

Je možné, že P a NP jsou jen dvě různá označení pro stejnou třídu úloh? Je to možné. Matematický argument v pozadí tohoto tvrzení stojí na revolučním výsledku Stephena Cooka z roku 1971. (Nejsme v žádném příbuzenském vztahu, ale tato shoda jmen mi přinesla alespoň několik dobrých večerí, na které jsem byl omylem pozván.) Cookova věta tvrdí, že existuje určitý problém ve třídě NP, který má tu vlastnost, že případná existence dobrého algoritmu pro tento problém už zaručuje existenci dobrého algoritmu pro všechny další problémy ve třídě NP. Ve skutečnosti Cook, Karp a další ukázali, že existuje mnoho takových speciálních problémů, kterým se říká NP-úplné problémy. TSP je příkladem NP-úplného problému.

Nalezení dobrého algoritmu pro libovolnou NP-úplnou úlohu by tak prokázalo, že P se rovná NP. Kdokoli najde obecnou metodu pro řešení TSP, získá mnohem víc než první cenu v soutěži Procter & Gamble: Clayův matematický institut nabídl cenu 1 000 000 dolarů za prokázání nebo vyvrácení tvrzení $P = NP$.

Převládající názor v matematické komunitě je, že tyto třídy nejsou totožné, ale neexistuje žádný velký teoretický důvod, proč by to tak mělo být. V pozadí je jen neurčitý pocit, že rovnost těchto tříd by byla příliš hezká: každý problém s ověřitelným řešením by měl automaticky zaručenu existenci efektivního algoritmu pro jeho nalezení. Dokonce platí, že současné šifrovací systémy stojí na předpokladu, že pro některé NP problémy neexistuje dobrý algoritmus. Obchodování na internetu by se prakticky zhroutilo, kdyby existovaly rychlé algoritmy pro tyto dosud obtížně řešitelné úlohy: představte si, co by hacker udělal s takovým rychlým algoritmem a citlivými daty.

Katastrofické vize popsané v povídce *Antibodies* jdou však mnohem dál – programy umělé inteligence se najednou staly mnohem rychlejšími a ovládly

1. VELKÁ OTÁZKA

své biologické tvůrce. Je však pravděpodobné, že bychom si s takovými otravnými stroji dokázali poradit a že příznivé důsledky rovnosti $P = NP$ by bohatě převážily nad těmi špatnými. Jak v přehledovém článku z roku 2009 napsal Lance Fortnow: „Mnoho lidí se zabývá negativními důsledky, např. že $P = NP$ by znemožnilo techniky šifrování založené na veřejném klíči. To je pravda, ale kdyby platilo $P = NP$, pak by celý internet vypadal jen jako zanedbatelná položka před zrodem mnohem bohatší historie.“¹² Fortnow argumentuje, že mnoho úloh by pak bylo snadné optimalizovat: obchodní cestující by měli své nejkratší cesty, továrny by mohly pracovat na nejvyšší možný výkon, letecké společnosti by provozovaly své lety bez zpoždění a tak dále. Krátce řečeno, dokázali bychom lépe využít zdroje, které máme na tomto světě k dispozici. Také přírodní vědy, ekonomie a technické obory by najednou získaly nástroje o celé řady výkonnější, než mají teď. Nové výsledky by komisi pro udílení Nobelovy ceny zaměstnávaly na celé roky dopředu. Ale vraťme se raději nohama na zem, skutečnost je nejspíš jiná.

Odpověď na otázku, zda se P rovná nebo nerovná NP , je jedním z největších matematických problémů současnosti. Při pokusech o řešení NP -úplných problémů je dobré si uchovat chladnou hlavu a nenechat se omráčit důsledky, které by s sebou neslo nalezení dobrého algoritmu. Koneckonců jde vlastně jen o to, jak najít optimální cestu pro obchodního cestujícího.

JEDEN PROBLÉM PO DRUHÉM

I když nevíme, jak vyřešit TSP jednou provždy, není třeba sedět s rukama v klíně. TSP je typickým příkladem problému, pro jehož řešení se hodí pragmatický přístup s označením *algoritmické inženýrství*.¹³ Mottem tohoto přístupu je nebrat slovo „nejde“ nebo „neumíme“ jako odpověď. Teoretické úvahy sice naznačují, že jakmile překročíme jistou velikost, vyskytnou se určité příklady s ohromnými nároky na výpočetní čas, to ale neznamená, že kdykoli se setkáme s nějakým velkým konkrétním příkladem, je třeba se vzdát a uchýlit se k hrubému odhadu. Každý konkrétní příklad se můžeme pokusit vyřešit - a tato snaha postupně vedla k vytvoření technik a počítačových programů, které dnes dokážou vyřešit instance téměř neuvěřitelné složitosti.

Překonání nové hranice velikosti problému je mezi vědci oslavováno podobně jako pokoření nového himálajského vrcholu nebo překonání dosavadního rekordu ve sprintu na 100 metrů. Nejde o to, že by nás nějak zvlášť

zajímaly podrobnosti jedné konkrétní optimální cesty, ale žene nás vědomí, že se řešení TSP posunulo zase o kousek dál. Obchodní cestující nás může nakonec přece jen porazit, ale nevzdáme se bez boje.

Od 48 k 85 900

Hrdiny na poli výzkumu TSP jsou Dantzig, Fulkerson a Johnson. I přes nástup počítačů a příliv nových matematiků zůstalo řešení TSP se 48 městy nalezené Dantzigem a jeho kolegy (jejich řešení vůbec nevyužívalo počítače) nepokořeno dalších 17 let. Vznikaly nové algoritmy, nové programy a nové články, ale jejich řešení dlouho nikdo nepřekonal. Rekord vydržel až do roku 1971, kdy jej překonali vědci z IBM Michael Held a Richard Karp. Jedná se o stejného Karpa, který studoval teoretické meze problému a připouštěl možnost, že žádné definitivní řešení neexistuje. Testovací instancí bylo nyní 64 bodů náhodně rozmístěných ve čtvercové oblasti, přičemž délka cesty mezi dvěma body se rovnala délce jejich nejkratší spojnice.

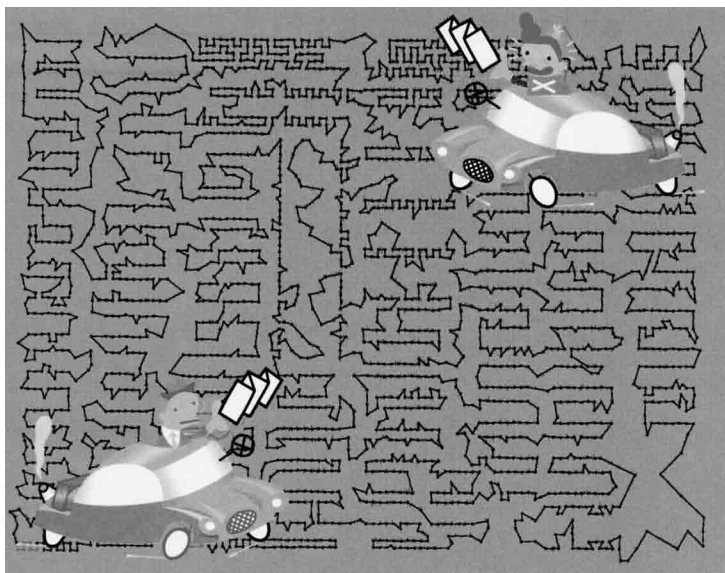
Algoritmus vytvořený Heldem a Karpem držel rekord několik dalších let, kdy se několik týmů snažilo jejich metodu vylepšit, aby z ní dostali ještě o trochu víc. Ale skupina kolem Dantziga vrátila úder v roce 1975, kdy Panagiotis Miliotis použil mírně upravenou verzi původních myšlenek vzniklých na půdě RAND a vypočítal nejkratší cestu mezi 80 náhodně uspořádanými body.

Miliotisovy výsledky ukázaly, že přístup skupiny kolem Dantziga je slibnější, než se původně zdálo, a že velikost řešitelných problémů lze posunout za dosud uvažované meze. Tento předpoklad byl krátce nato podpořen teoretickými výzkumy Martina Grötschela a Manfreda Padberga, kteří položili základy pro podstatné rozšíření základní metodologie. Tato dvojice matematiků dominovala poli TSP příštích patnáct let. Jejich úspěšná cesta započala Grötschelovou konstrukcí optimální cesty 120 městy v Německu, kterou publikoval ve své disertační práci v roce 1977. Padberg se v té době spojil s výzkumným pracovníkem IBM Harlanem Crowderem a spolu vypočetli optimální řešení instance TSP s 318 městy (jejich příklad vznikl původně z praktického problému týkajícího se vhodného provrtání desky s tištěnými spoji). Tyto dva výsledky, i když samy o sobě úžasné, byly ve skutečnosti jen prvními nesmělými krůčky k řadě převratných článků publikovaných v roce 1987. Týmy Grötschela a Padberga pracovaly nezávisle na obou stranách Atlantiku a v rychlém sledu vyřešily příklady s 532 městy v USA, 666 různými místy na světě a úlohy založené na vrtání otvorů při výrobě desek s tištěnými spoji s 1 002 a 2 392 body. Grötschel spolupracoval s doktorandem Olafem

1. VELKÁ OTÁZKA

Hollandem na Univerzitě v Bonnu, zatímco Padberg s italským matematikem Giovannim Rinaldim na New York University.

Vašek Chvátal a já jsme se s chutí přidali k této vlně zájmu o TSP v roce 1988. Byli jsme v nezáviděníhodné pozici těch, kteří se snaží dohonit ohromný náskok Grötschela s Hollandem a Padberga s Rinaldim, ale měli jsme to štěstí, že jsme mohli pracovat po boku široké a aktivní matematické komunity, která se na problém dívala z teoretického hlediska. Dosud získané výsledky mohly poskytnout dobrá vodítka, jak zaútočit na TSP; bylo jen potřeba je pořádně projít. Než jsme začali, provedli jsme, jak se později ukázalo, nejdůležitější krok celé přípravné fáze: začlenili jsme do svého týmu Davida Applegata a Roberta Bixbyho, dva z nejlepších matematiků té doby v oboru výpočtové složitosti. Výzkum začal pomalu a několikrát jsme skončili ve slepé uličce, ale v roce 1992 jsme vyřešili problém desky s tištěnými spoji s 3 038 městy, na který jsme použili velkou síť z paralelně pracujících počítačů. V dalších letech jsme objevené techniky postupně zdokonalovali, až jsme v roce 1998 našli optimální cestu mezi 13 509 městy v USA, v roce 2004 optimální cestu mezi 24 978 městy ve Švédsku a konečně v roce 2006



Obr. 1.6 Nový rekord na poli TSP: 3 038 měst. *Discover*, leden 1993.