14
Možná přijde i kormidelník

Když namísto pádlování veslujeme, platí stejné principy jako v předchozí kapitole. Viděli jsme, že výkon získaný díky přidanému členu posádky v kajaku jen tak tak převáží vliv vyšší hmotnosti a jí způsobený vyšší odpor, který je třeba při posouvání po hladině překonávat. Je to opravdu o fous. Rychlost lodi se zvyšuje pouze s devátou odmocninou počtu členů posádky (rychlost $\propto N^{1/9}$)* a čas, během nějž loď projede trať závodu, se zkracuje týmž neoslnivým tempem.

Jízda na kajaku se od veslování liší v jednom zajímavém ohledu: kajakáři nejezdí s kormidelníkem. Je jasné, že kormidelník nepřispívá žádným výkonem k pohonu lodi, ale jen zvyšuje její hmotnost, velikost i odpor ve vodě, takže čtyřveslice s kormidelníkem nejspíš popluje pomaleji než čtyřka bez kormidelníka. Výhoda kormidelníka spočívá v tom, že se veslaři nemusejí starat o řízení lodi a vyhnou se ztrátám energie kvůli korekcím směru, když se loď odchýlí od nejkratší dráhy k cíli.[1] Mohou se soustředit výlučně na veslování. Kormidelník hraje důležitou roli také při povzbuzování posádky a diktování tempa záběrů. Mohou tyto vklady převážit přítomnost „mrtvého nákladu“ v lodi, byť obvykle velmi lehkého?

Podíváme-li se například na vítězné časy dvoučlenných a čtyřčlenných posádek s kormidelníkem a bez kormidelníka

---

* Viz poznámku o zápisu $A \propto B$ k předchozí kapitole.

na hrách v Moskvě v roce 1980, je jasné, že lepší ovládání lodi a povzbuzování nedokáže převážit nevýhodu neveslujícího pasažéra: časy posádek bez kormidelníka jsou vždy kratší než časy posádek s kormidelníkem.

Počet veslařů	S kormidelníkem	Bez kormidelníka	Poměr časů s/bez kormid.
Dvojka: $N = 2$	422,5 s	408,0 s	1,04
Čtyřka: $N = 4$	374,5 s	368,2 s	1,02

Použijeme-li znovu výše uvedený náhled na výkon a odpor vody se započtením jedné osoby navíc, která zvyšuje velikost a třecí odpor lodi, ale nepřidává na výkonu, dostaneme čas potřebný k absolvování závodu s N veslaři a kormidelníkem:

$$T(\text{s kormidelníkem}) \propto \frac{(N+1)^{2/9}}{N^{1/3}},$$

přičemž čas bez kormidelníka je:

$$T(\text{bez kormidelníka}) \propto N^{-1/9},$$

a jejich poměr tedy je:

$$\frac{T(\text{s kormidelníkem})}{T(\text{bez kormidelníka})} = \left(\frac{N+1}{N}\right)^{2/9}.$$

Podle očekávání bude mít výraz na pravé straně hodnotu vždy větší než 1 (protože $N + 1$ je větší než N), a dá se tedy předpovědět, že čas posádky s kormidelníkem bude vždy delší než čas posádky bez něj. Pokusíme-li se však vypočítat, o kolik pomalejší tento čas bude, musíme být obezřetní. Zatím jsme pokaždé předpokládali, že naši veslaři (i kajakáři) jsou všichni stejného vzrůstu. Pro veslaře je to docela dobrá aproximace, ale ne pro kormidelníka. Kormidelník musí být vždy co nejdrobnější a nejlehčí, aby zvýšená zátěž a odpor vody byly co nejmenší. Lepším odhadem je tedy předpoklad, že kormidelník má oproti veslaři zhruba poloviční hmotnost. Tak bude celková hmotnost posádky i s přívažkem kormidelníka $N + 1/2$, a nikoli $N + 1$, kterou jsme v odhadech časů používali doposud. Díky tomu pak získáme lepší odhad času závodu u lodí s kormidelníkem a bez něj:

$$\frac{T(\text{s kormidelníkem})}{T(\text{bez kormidelníka})} = \left(\frac{N + 1/2}{N}\right)^{2/9}.$$

Pro dvoučlenné posádky ($N = 2$) dostáváme poměr $\left(\frac{25}{16}\right)^{1/9} = 1{,}05$ a pro čtyřčlenné posádky $\left(\frac{81}{64}\right)^{1/9} = 1{,}03$. To jsou poměry velmi blízké hodnotám naměřeným na olympiádě v roce 1980 z tabulky výše.[2]

Na závěr zmíníme jednu z největších záhad v olympijské historii, která souvisí právě s kormidelníkem. Na hrách v Paříži v roce 1900 se dvoučlenná nizozemská posádka na startu zbavila kormidelníka, protože jim připadal příliš těžký. Na jeho místo si z přihlížejícího davu vybrali drobného, asi desetiletého francouzského chlapce. I přes nezkušenost nového lodivoda vyhráli zlatou medaili. Po závodě však hoch zmizel ještě dříve, než mohl kdokoli zjistit, kdo to byl.

15
V kartách

Sbírání obrázkových karet bývalo kdysi velkou vášní. Karty byly většinou zaměřené na chlapce, a tak se sbíraly hlavně lodě, vojenská letadla a sportovci, ale také zvířata a květiny. Jednotlivé obrázky bývaly přibalené ke žvýkačkám, snídaňovým vločkám a lupínkům nebo k čaji, aby se jich kupovalo víc. Ze sportovců byli nejoblíbenější – stejně jako u dnešních samolepek Panini – hlavně fotbalisté (a v Americe baseballisté). Často jsem výrobce podezříval, že nevydávají obrázky všech hráčů ve stejném nákladu. Všichni se třeba marně pídili po posledním obrázku s Bobbym Charltonem, aby si zkompletovali sadu 50 karet. Všechny ostatní karty se daly získat výměnným obchodem od kamarádů, kteří měli potřebný obrázek dvakrát, tuto klíčovou kartu však neměl nikdo.

Docela mě potěšilo, když jsem zjistil, že se podobnou sběratelskou činností zabývají i mé vlastní děti. Dnes se možná sbírá něco jiného než dřív, podstata však zůstala stejná. Co s tím má však společného matematika? Přímo se nabízí zajímavá otázka, kolik karet potřebujeme koupit, abychom zkompletovali svoji sadu. Předpokládejme přitom, že každá z karet v sadě vychází ve stejném nákladu, a že tedy v libovolném balíčku najdete každou z nich se stejnou pravděpodobností. Sady veteránů z mé knihovny měly obě po padesáti kartách. První kartu, kterou z jedné sady získám, tedy zaručeně ještě nemám (nemám totiž žádnou). Jak to je ale s druhou kartou? Pravděpodobnost, že ji ještě nemám, je 49/50. U třetí karty je pravděpodobnost 48/50 – a tak dál. Když už máte karet 40, je pravděpodobnost získání nového přírůstku jen 10/50, a v průměru tedy budete muset koupit dalších 50/10 čili 5 balíčků vloček, abyste našli kartu, kterou ještě nemáte. Průměrný počet karet, které bude muset ke zkompletování své sbírky koupit, bude tedy roven součtu padesáti členů:

$$50/50 + 50/49 + 50/48 + \dots + 50/3 + 50/2 + 50/1,$$

kde první člen představuje jistota nabytí první karty a každý následující člen říká, kolik dalších karet musíte koupit, abyste získali druhou, třetí a další karty ze sady.

Po vytknutí společného činitele 50 z čitatelů všech členů dostaneme

$$50 \times (1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/50).$$

Součet členů v závorce je známý jako „harmonická řada“, jejímž dobrým odhadem je pro velký počet členů (a 50 už je dostatečně velké číslo) hodnota $0{,}58 + \ln 50$ (kde $\ln 50 = 3{,}9$ je přirozený logaritmus čísla 50). Ke zkompletování své sbírky tedy potřebujeme v průměru kolem

$$\text{počet karet} \sim 50 \times (0{,}58 + \ln 50).$$

Pro moje sady po padesáti automobilech je tato hodnota 224,5 – tolik karet si tedy budu muset v průměru koupit, abych uzavřel celou sadu. Ze vzorce mimochodem vyplývá, že zkompletování první poloviny sbírky je mnohem lehčí než zkompletování poloviny druhé (a tedy sbírky celé). K nasbírání 25 různých karet (tedy poloviny sbírky) potřebujeme koupit 50/50 + 50/49 + ... + 50/26 karet, což je rozdíl harmonických řad s 50 a 26 členy, a proto

$$\text{počet karet pro poloviční sadu} \sim$$
$$\sim 50 \times (\ln 50 + 0{,}58 - \ln 25 - 0{,}58) = 50 \ln 2 = 0{,}7 \times 50 = 35,$$

neboli první polovinu mé sady o počtu 50 karet získám v průměru již po 35 pokusech. Pro získání druhé poloviny sady však už budete muset koupit 225 – 35 = 190 balíčků vloček.

Zajímalo by mě, jestli si dřívější výrobci dělali podobné výpočty. Prospělo by jim to, protože by takto mohli zjistit, jaký maximální výnos mohou v průměru očekávat od dlouhodobého prodeje sady s konkrétním počtem karet. Tento výnos je ovšem maximální *možný* výnos, protože sběratelé budou s kartami obchodovat, tudíž získávat nové přírůstky spíše výměnou než koupí.

Jaký vliv má na tyto výpočty vyměňování karet s kamarády?

Řekněme, že máte K kamarádů a všichni sbíráte karty s cílem vytvořit $(K + 1)$ sad – abyste každý měl jednu. Kolik karet musíte v průměru koupit nyní? Pro 50 karet, pokud trh s kartami funguje optimálně, se výsledek blíží k hodnotě

$$50 \times (\ln 50 + K \ln(\ln 50) + 0{,}58),$$

zatímco pokud by všichni sbírali bez vyměňování, budou ke zkompletování $K + 1$ jednotlivých sad potřebovat zakoupit kolem $(K + 1) \times 50 \times (\ln 50 + 0{,}58)$ karet. Vyměňováním tedy ušetříte $156K$ nákupů, což je pozoruhodná úspora dokonce už pro $K = 1$.

16
Ohnivá kola

V každém sportu, v němž hraje roli výbava, panuje silný zájem o technologie a snaha vybavení neustále vylepšovat – i když možná je leckdy ještě důležitější zájem výrobce přimět sportující veřejnost k nákupu nové kolekce vybavení pro každou sezonu. Jednou z nejznámějších oblastí, které jsou trvale pod drobnohledem inženýrů, je cyklistika. Ve snaze o neustálé stahování desetin a setin z časů zajížděných na velodromu jsme neustále svědky zavádění speciálních dresů, nových tvarů řídítek nebo diskových kol.

Zajímavá otázka zní, zda lze u bicyklu získat větší výhodu odlehčením rámu nebo kol. Při jízdě na kole musí cyklista vyvinout kinetickou energii $\frac{1}{2}Mv^2$, která zajistí rozjezd bicyklu o celkové hmotnosti M, což zahrnuje rám, obě kola i cyklistu, na rychlost v. Jezdec ale musí dodat i rotační energii nutnou k roztočení kol, která má velikost $\frac{1}{2}Iw^2$, přičemž w je úhlová rychlost otáčení kol, pro niž platí $v = rw$, kde r je poloměr kola. Hodnota I udává moment setrvačnosti kola (pro jednoduchost budeme předpokládat, že obě kola jsou stejná a že se nesmýkají). Moment setrvačnosti nám říká, jak těžké je kolo rozpohybovat, a je tím větší, čím dále od středového náboje je hmota kola rozložena. Moment setrvačnosti je vždy přímo úměrný hmotnosti kola m a čtverci jeho poloměru r, tedy $I = bmr^2$, kde $b = 1$, pokud je veškerá hmota soustředěna v prstenci na obvodu kola (paprsky zde zanedbáváme – v porovnání s ostatními částmi kola jsou velmi lehké), zatímco pokud má kolo tvar pevného disku, použijeme $b = 1/2$.

Celková energie, kterou jezdec musí dodat,[1] aby uvedl bicykl (včetně rámu, vlastního těla a obou kol) do pohybu rychlostí v a zároveň obě kola roztočil, tedy bude:[2]

$$\text{celková energie} = \frac{1}{2}(2m + m_{\text{rám}})v^2 + 2 \times \frac{1}{2}Iw^2.$$

Protože však $I = bmr^2$ a $v/r = w$, dostaneme:

$$\text{celková energie} = \frac{1}{2}v^2\Big(m_{\text{rám}} + 2(1 + b)m\Big).$$

Roztočení kol tradiční konstrukce s hodnotou $b = 1$ tedy odčerpá jezdci energii, která je úměrná čtyřnásobku hmotnosti jednoho kola, zatímco pro pohyb diskového kola s hodnotou $b = 1/2$ je potřeba energie úměrná trojnásobku hmotnosti jednoho kola. Zajímavé na tom je, že poloměr kol se z našeho vzorce vykrátí a kola o menším průměru nejsou o nic výhodnější, ledaže by měla zároveň menší hmotnost. Z toho všeho je jasně vidět, že pokud byste chtěli vyvíjet nové materiály k odlehčení bicyklů, přinese snížení hmotnosti obou kol třikrát nebo čtyřikrát větší výhodu než stejná redukce hmotnosti rámu.

17
Bodové hodnocení

Desetiboj je dvoudenní kombinovaná soutěž, a jak už jeho název napovídá, zahrnuje deset lehkoatletických disciplín. Pro atlety je to fyzicky nejnáročnější soutěž. Během prvního dne je na programu sprint na 100 m, skok do dálky, vrh koulí, skok vysoký a běh na 400 m. Druhý den na atlety čeká běh na 110 m překážek, hod diskem, skok o tyči, hod oštěpem a nakonec běh na 1 500 m. Aby bylo možné výsledky těchto velmi různých disciplín – a v nich dosažených časů a vzdáleností – zkombinovat, bylo nutné vyvinout systém bodování. Každý výkon je podle sady bodovacích tabulek ohodnocen předem stanoveným počtem bodů. Body se po jednotlivých disciplínách postupně sčítají a vítězem je atlet, který po všech deseti disciplínách dosáhne nejvyššího počtu bodů. V ženském sedmiboji jsou vynechány tři disciplíny, ale jinak probíhá naprosto stejným způsobem (100 m překážek, skok vysoký, vrh koulí, sprint na 200 m, skok daleký, oštěp a běh na 800 m).

Na desetiboji může leckoho zarazit, že bodovací tabulky, podle nichž se body za různé výkony přidělují, jsou vytvořeny svévolně. Původně je kdosi sestavil v roce 1912 a od té doby jen čas od času prošly určitými úpravami. Když Daley Thompson vyhrál desetiboj na olympijských hrách v roce 1984, nedosáhl na světový rekord o jediný bod. Jenže po úpravách tabulek, k nimž došlo hned rok nato, se jeho skóre navýšilo, takže se stal zpětně držitelem světového rekordu! Od roku 2001 držel světový rekord 9 026 bodů Roman

Šebrle, než ho v roce 2012 výkonem 9 039 bodů překonal Ashton Eaton.*

Kdybyste v každé z jednotlivých disciplín dosáhli výkonu na úrovni světového rekordu, získali byste 12 500 bodů. Když se sečtou body za nejlepší výkony, jakých kdy bylo při desetibojařských soutěžích dosaženo, dostaneme celkový bodový součet 10 485. Bodovací tabulky byly v roce 1912 vytvořeny tak, aby překonání tehdejšího světového rekordu v každé z disciplín přineslo (přibližně) 1 000 bodů. Ale rekordy se neustále posouvají a nyní by například světový rekord 9,58 s Usaina Bolta ve stovce znamenal 1 202 desetibojařských bodů, kdežto nejrychlejší čas dosažený v desetiboji je „pouze" 10,22 s, což vydá za 1 042 bodů. Aktuální světový rekord, který by k celkovému součtu přispěl nejvíce, je rekord Jürgena Schulta v hodu diskem 74,08 m, což dává pěkných 1 383 bodů.

Všechna tato fakta vyvolávají důležité otázky. Co by se stalo, kdyby se bodovací tabulky změnily? V kterých disciplínách se čas a úsilí investované do tréninku bodově vyplatí nejvíc? A jaký typ atleta si povede v desetiboji nejlépe – běžec, vrhač nebo skokan?

Nastavení hodnot v bodovacích tabulkách se vyvíjelo velmi dlouhou dobu a zohledňuje světové rekordy, standardní výkony závodních atletů i historické výkony v desetiboji. Nakonec však vždy jde o volbu na základě lidského uvážení, a kdyby byly bodovací tabulky zvoleny jinak, dostávaly by se za tytéž sportovní výkony jiné počty bodů a závody by nejspíš měly jiné vítěze. Bodovací tabulky Mezinárodního svazu atletických federací (IAAF) z roku 2001[1] mají jednoduchou matematickou strukturu.

---

* Ohromující rekord v desetiboji, který musí být dokončen za méně než 60 minut, drží Robert Změlík se 7 897 body!

Ve všech běžeckých disciplínách – kde je žádoucí dávat více bodů za kratší časy – se body přidělují podle následujícího vzorce (desetinná část se zaokrouhluje na nejbližší celé číslo):

$$\text{počet bodů za běžeckou disciplínu} = A \times (B - T)^C,$$

kde T je dosažený čas atleta v běžecké disciplíně a A, B a C jsou číselné konstanty, zvolené pro každou disciplínu tak, aby vyměřený počet bodů byl co možná nejspravedlivější. Hodnota B udává mezní čas, při jehož překročení už vždy získáte jen nulový počet bodů, takže můžeme předpokládat, že T je vždy menší než B. Obdobně u skoků a hodů – kde se naopak přiděluje více bodů za delší vzdálenosti (D) – bude vzorec pro jednotlivé disciplíny vypadat takto:

$$\text{počet bodů za technickou disciplínu} = A \times (D - B)^C.$$

Čísla A, B a C jsou pro každou z deseti disciplín odlišná a uvádíme je v následující tabulce. Za vzdálenost menší nebo rovnou hodnotě B nebo za čas delší nebo rovný hodnotě B získává závodník 0 bodů. Všechny vzdálenosti jsou uvedeny v metrech a časy v sekundách.

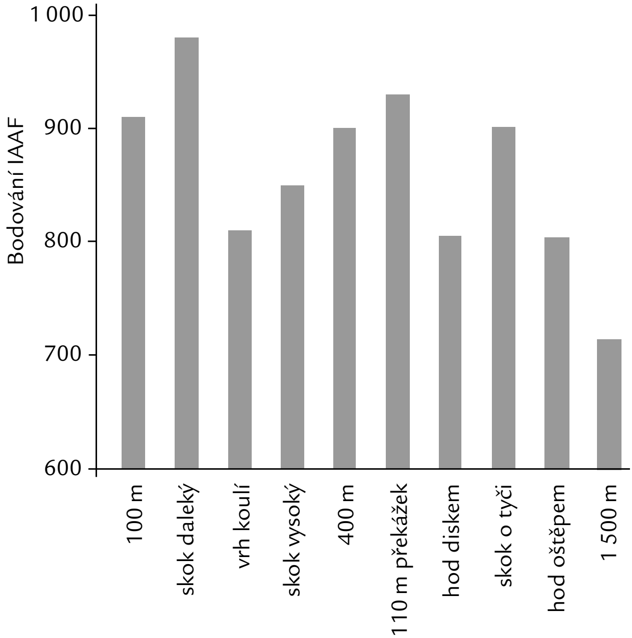
Disciplína	*A*	*B*	*C*
100 m	25,4347	18	1,81
Skok daleký	0,14354	220	1,4
Vrh koulí	51,39	1,5	1,05
Skok vysoký	0,8465	75	1,42
400 m	1,53775	82	1,81
110 m překážek	5,74352	28,5	1,92
Hod diskem	12,91	4	1,1
Skok o tyči	0,2797	100	1,35
Hod oštěpem	10,14	7	1,08
1 500 m	0,03768	480	1,85

Abyste získali představu, ve které z disciplín je „nejjednodušší“ se prosadit, podívejte se na tuto tabulku s výkony, jichž je třeba dosáhnout k dosažení 900 bodů v jednotlivých disciplínách (což nám dá celkový součet 9 000 bodů).

Disciplína	900 bodů
100 m	10,83 s
Skok daleký	7,36 m
Vrh koulí	16,79 m
Skok vysoký	210 cm
400 m	48,19 s
110 m překážek	14,59 s
Hod diskem	51,4 m
Skok o tyči	4,96 m
Hod oštěpem	70,67 m
1 500 m	247,42 s (= 4 min 7,42 s)

V desetibojařském vzorci lze vypozorovat zajímavé schéma. Mocnitel C má pro běžecké disciplíny přibližně hodnotu 1,8 (pro překážky je to 1,9), pro skoky a tyčku hodnotu blízkou 1,4 a pro hody se blíží 1,1. Hodnota $C > 1$ znamená, že systém bodování je „progresivní“ a kompenzuje okolnost, že čím vyššího výkonu dosahujete, tím je těžší ho dále zlepšit. To odpovídá skutečnosti. Každý z vás se jistě setkal s tím, že čím pokročilejší v určité disciplíně jste, tím těžší je se dál zlepšovat, zatímco začátečníci dělají zpočátku rychlé pokroky velmi snadno. „Regresivní“ systém bodování by obsahoval $C < 1$ a v „neutrálním“ systému bychom měli $C = 1$. Tabulky IAAF jsou ve vztahu k běžeckým disciplínám neobyčejně progresivní, vůči skokům a tyčce jsou pořád ještě celkem progresivní, ale co se týče hodů, jsou téměř neutrální.

Abychom získali představu, jak jednotlivé disciplíny přispívají k celkovému součtu bodů, znázornili jsme v následujícím grafu rozdělení bodů pro průměrné hodnoty u každé z deseti disciplín ve stovce nejlepších mužských výkonů všech dob.



Je zde zřetelně vidět výchylka zvýhodňující dobré výkony ve skoku dalekém, překážkách a sprintech (100 m a 400 m). Výkony ve všech těchto disciplínách úzce souvisejí s výbušnou rychlostí sprinterů. Patnáctistovka a tři házecí a vrhačské disciplíny jsou naopak dost upozaděny. Chcete-li tedy trénovat úspěšného desetibojaře, vezměte si do parády velkého silného sprintera-překážkáře a vybudování síly a techniky pro hody nechte na později. Speciální přípravou na patnáctistovku se žádní desetibojaři příliš nezatěžují a obvykle spoléhají jen na obecný trénink vytrvalostních schopností.

Je jasné, že změny ve vzorci systému bodování by tento sport proměnily. Spíše než na špičkových výkonech specialistů v jednotlivých disciplínách jsou stávající vzorce z velké části založeny na výkonnostních datech desetibojařů z (nedávné) minulosti. To každou zvýhodňující výchylku současných bodovacích tabulek jenom posiluje, protože výkony špičkových desetibojařů jsou formovány právě těmito tabulkami. Zkusme provést myšlenkový experiment a představit si jednoduchou změnu, motivovanou fyzikálními principy. V každé disciplíně, ať už běžecké, házecí či skokanské – možná s výjimkou běhu na 1 500 m – hraje klíčovou úlohu kinetická energie, jakou dokáže atlet vyvinout. Tato energie záleží na čtverci jeho rychlosti. Výška, jakou skokan či tyčkař překoná, i vzdálenost, do jaké doskočí dálkař, to jsou všechno hodnoty přímo úměrné čtverci jeho odrazové rychlosti. Vzhledem k tomu, že čas dosažený při běhu konstantní rychlostí bude přímo úměrný hodnotě $(\text{vzdálenost}/\text{čas})^2$, můžeme pro všechny disciplíny vzít $C = 2$. Pokud použijeme tuto konstantu a vybereme vhodné hodnoty A a B, dostaneme zajímavé změny v desítce nejlepších desetibojařů. Šebrle, který držel rekord až do roku 2012, by byl s novým součtem 9 318 až druhý, zatímco tehdy druhý muž historického pořadí Dvořák by jej předčil v novém světovém rekordu 9 468. Obdobně by se změnilo i další pořadí. Schéma změny je zajímavé. Výběr konstanty $C = 2$ ve všech disciplínách by byl velmi progresivní a silně by upřednostňoval závodníky s mimořádnými výkony. Zároveň by v důsledku skokové změny hodnoty $C = 1{,}1$, která se pro házecí disciplíny používá nyní, dramaticky zvýhodnil dobré vrhače před sprintery-překážkáři. To jenom ilustruje potíže s bodovacími systémy všeho druhu – vždycky se najde někdo, kdo nebude spokojený.