Prvočíselná dvojčata

I když se nedaří nalézt obecnou zákonitost, lze aspoň studovat chování některých prvočísel se zvláštními vlastnostmi. Je to jako kdybychom stáli přede dveřmi, jimiž vychází nekonečný proud osob. Víme, že některé jsou muži a některé ženy, ale nedokážeme nalézt pravidlo předpovídající, zda vyjde muž nebo žena. Pak si ale jednoho dne všimneme něčeho zvláštního: příležitostně vyjdou muži s kloboukem, ženy s brýlemi a děti s deštníkem. Tak se snažíme nalézt zákonitost, která popisuje, kdy se objeví tito specifičtí jedinci – třeba: muži s kloboukem se objevují stokrát častěji než ženy, nebo kdykoli jeden z nich vyjde, vždycky ho následuje žena. To nám umožňuje vytvořit jistou zákonitost. Nebo se nám stane, že naše předpovědi fungují dlouho a selžou až poté, co dveřmi projdou tři miliony osob. Pak si povzdechneme: „Těsně vedle!“ a naše bádání uzavřeme slovy: „Je to téměř, jako kdyby…“ – výraz, který bylo během studia prvočísel slyšet často.

Několik skupin spřízněných prvočísel se nicméně podařilo úspěšně charakterizovat (přesněji řečeno několik desítek) a to umožnilo během let v teorii prvočísel určitý pokrok. Níže se soustředíme na některé neobvyklé páry prvočísel, jejichž charakteristiky nám pomohou lépe pochopit matematické potíže s těmito nanejvýš nevyzpytatelnými čísly.

Žádná dvě prvočísla nemohou přímo sousedit, protože každé prvočíslo je liché, tudíž sousední musí být sudé, a proto nejde o prvočíslo. Výjimkou jsou čísla 2 a 3, která sousedí, a 2 je jediné sudé prvočíslo.

OSAMĚLOST PRVOČÍSEL

Sousední prvočísla mohou být od sebe oddělena miliony a miliony čísel, anebo také pouze jedním, což je to nejbližší sousedství, z jakého se mohou těšit – s výjimkou prvočísel 2 a 3 nemohou prvočísla nikdy bezprostředně sousedit. Tato skutečnost byla použita jako metafora v nedávno vydaném románu Paola Giordana *Osamělost prvočísel*. V jednom odstavci románu je tato metafora vysvětlena: „Když byl Mattia v prvním ročníku na univerzitě, dozvěděl se, že mezi prvočísly jsou některá, která jsou obzvláště vzácná. Matematici jim říkají prvočíselná dvojčata: jsou to dvojice prvočísel, která si jsou blízká, která téměř sousedí, ale vždycky mezi nimi leží sudé číslo, jež brání, aby se opravdu dotýkala. Jsou to třeba dvojice 11 a 13 nebo 17 a 19 nebo 41 a 43… Mattia měl dojem, že on a Alice jsou také takoví, prvočíselná dvojčata, osamělá a ztracená, blízká, ale ne tak blízká, aby se mohla dotýkat.“

V první stovce čísel nalezneme následující páry prvočísel, mezi nimiž leží pouze jedno číslo:

$$(3,5),\ (5,7),\ (11,13),\ (17,19),\ (29,31),\ (41,43),\ (59,61)\ \text{a}\ (71,73).$$

Tyto dvojice se nazývají „prvočíselná dvojčata“ nebo prostě jen „dvojčata“. Dvojčata mohou být popsána předpisem $(p, p+2)$, kde p je prvočíslo. Seznam všech prvočíselných dvojčat v první tisícovce čísel vypadá následovně:

$$\begin{array}{ccccc}
(3,5), & (5,7), & (11,13), & (17,19), & (29,31), \\
(41,43), & (59,61), & (71,73), & (101,103), & (107,109), \\
(137,139), & (149,151), & (179,181), & (191,193), & (197,199), \\
(227,229), & (239,241), & (269,271), & (281,283), & (311,313), \\
(347,349), & (419,421), & (431,433), & (461,463), & (521,523), \\
(569,571), & (599,601), & (617,619), & (641,643), & (659,661), \\
(809,811), & (821,823), & (827,829), & (857,859), & (881,883).
\end{array}$$

Už víme, že jak postupujeme posloupností přirozených čísel, objevují se prvočísla stále vzácněji. Nicméně díky počítačové analýze dneska také víme, že prvočísla tohoto typu se vyskytnou i mezi extrémně velkými čísly, což matematiky vedlo k domněnce, že prvočíselných dvojčat je nekonečně mnoho (stejně jako prvočísel), ale zatím se to nikomu nepodařilo dokázat.

Další pozoruhodnou skupinou prvočísel v první stovce přirozených čísel je skupina: 3, 5 a 7. Je-li p prvočíslo, pak takovéto trojice mají strukturu $(p, p+2, p+4)$. Takovéto skupiny bychom mohli nazývat „triplety“. Vlastně ale žádný název nepotřebujeme, protože existuje pouze tato jediná trojice. Tento výsledek byl potvrzen. Tím je celá záležitost uzavřena – naštěstí, jinak bychom měli další nedokázané hypotézy.

Největší známá dvojčata (objevená v roce 2016) jsou tvořena čísly

$$2\,996\,863\,034\,895 \times 2^{1\,290\,000} - 1 \quad \text{a} \quad 2\,996\,863\,034\,895 \times 2^{1\,290\,000} + 1,$$

která mají 388 342 číslic!

NEKONEČNÉ VZDÁLENOSTI

Hypotéza prvočíselných dvojčat vyvolala řadu dalších domněnek, kromě té, že je jich nekonečně mnoho. Jedna z nich je jejím zobecněním a zformuloval ji v roce 1849 francouzský matematik Alphonse de Polignac (1817–1890). Jeho hypotéza zní následovně: pro každé celé číslo C existuje nekonečně mnoho párů prvočísel, která jsou od sebe oddělena $2C - 1$ složenými čísly. Existuje tedy nekonečně mnoho prvočísel oddělených od sebe jedním složeným číslem, třemi složenými čísly, pěti složenými čísly, a tak dále. Pro $C = 1$ jde o hypotézu o prvočíselných dvojčatech.

Matematika a magie

Zdůraznili jsme, jak důležitou roli sehrávala a stále sehrávají v dějinách matematiky informační centra. Teď se soustředíme na další oblast, která měla v dějinách matematiky – a zvláště v teorii čísel – také velký význam. Jedná se o možnou souvislost mezi magií a čísly. Magií zde máme na mysli uplatnění matematiky v oboru, který se nazýval aritmologie, či častěji numerologie. Vztah mezi matematikou a numerologií je podobný jako vztah mezi astronomií a astrologií či mezi chemií a alchymií. Dnes působí tyto dvojice prakticky odděleně, ale po staletí pracovaly pospolu k oboustrannému prospěchu a tuto spolupráci nemůžeme pominout, pokud chceme získat přehled o tom, jak se věda v různých dějinných obdobích vyvíjela.

Čísla (a obzvláště prvočísla) nebyla jen předmětem matematického bádání, ale zabývali se jimi i filozofové, a ještě více upoutala pozornost náboženských kultů. Protože se čísla těší takové popularitě, jsou používána velice rozdílným způsobem. Nalezneme je v Bibli, v magických čtvercích, v magických součtech, a obzvláště ve filozofických základech pythagorejské školy, pro niž byly geometrické obrazce a čísla základem vší existence.

Život slavných matematiků, jako byli Mersenne a Fermat, je proto obklopen záhadami a legendami: říká se, že používali jen jednoduché matematické metody, a přitom dosáhli úspěchů, kterými předčili všechny ostatní. Historik Libri napsal: „Fermat znal věci, které my neznáme, a abychom se mu vyrovnali, potřebujeme metody dokonalejší než ty, které byly později objeveny.“ Neměli bychom zapomínat, že na rozdíl od mnoha současníků nepatřil Fermat k těm, kdo systematicky tajili své výsledky – i když i on skrýval, jak k nim dospěl.

Navštívíme období, kdy matematická exaktnost, která se začala rodit v 18. století, neměla tu důležitost, jakou jí přikládáme dnes. Cílem tehdejší doby bylo vytvořit matematický aparát pro praktické počítání, o teoretické bádání nešlo. Proto nebyl na překážku mystický symbolismus, jehož byla tradiční výuka plná, ale právě naopak – poskytoval prostor pro fantazii.

Za náš mylný názor na to, co je matematika, může to, že máme nesprávnou

KNIHA NUMERI

Numeri je čtvrtá kniha Starého zákona a část pětidílné Tóry připisované Mojžíšovi. Na první pohled je to účetní kniha a má nepochybnou historickou cenu, když pečlivě uvádí počty všeho kolem, od počtu náčelníků kmenů až po počty kusů dobytka. Poskytuje tím historický rámec, v němž se odehrávají události líčené v ostatních částech svatých textů. Je to ale také kniha tajných kódů pro zasvěcené, kteří dokážou dešifrovat význam čísel. Tak třeba 1 symbolizuje Boha, 2 člověka, 3 souhrn věcí atd. Je zajímavé, že 5 reprezentuje neurčité množství – „několik". Například o rozmnožení chlebů při Kázání na hoře se praví, že Ježíš vzal pět chlebů, tedy „několik chlebů". Zajímavé je to tím, že 5 je také nejmenší počet objektů, který již nedokážeme rozpoznat na první pohled. Je prokázáno, že bez počítání dokážeme v množině určit nejvýše čtyři objekty. Když jich je víc, musíme si jejich množinu rozdělit na soubory s nejvýše čtyřmi objekty, a teprve pak ty menší sečíst dohromady.

Tóru nazývají křesťané Pentateuch. Jde o prvních pět knih Starého zákona.

představu, jak velcí matematici pracují. Protože nevíme, jak funguje matematická mysl, nechápeme ani to, co matematici dělají, ale do jisté míry to také zodpovídá za nízkou popularitu tohoto oboru. Výsledek nějakého matematického bádání má většinou podobu teorému, a ten bývá uspořádán a vypulírován tak, že je téměř vždycky víceméně nesrozumitelný lidem, kteří nemají matematické vzdělání. Je obtížné dosáhnout toho, aby laik pochopil krásu skrytou v matematických tvrzeních, která jsou tak technická a přísně logická. Takhle ovšem nevypadala cesta, jíž matematik ke svému teorému dospěl – ve skutečnosti se prodíral houštinou čísel, v níž jsou cestičky sotva zřetelné a kde je většinou naprostá tma.

Některým strážcům morálky dělalo starosti, že se matematická mysl toulá v těchto nanejvýš temných intelektuálních výšinách. Dobře to ilustrují slova svatého Augustina: „Dobrý křesťan se musí mít na pozoru před matematiky a všemi, kdo dělají neupřímná proroctví. Existuje riziko, že se matematici spolčili s ďáblem a že jejich cílem je svést lidského ducha na scestí a poslat ho do pekla."

Kromě toho, co jsme nazvali informační centra, a kromě magických vlastností čísel existuje ještě třetí zvláštnost, kterou bychom neměli opominout, když sledujeme stopu prvočísel v historii matematiky. Jedná se o mimořádné nadání pro číselné operace, kterým disponují někteří lidé – schopnost, která jde často ruku v ruce s verbálním nadáním. Většina slavných matematiků, s nimiž se v kontextu prvočísel setkáme, měla také mimořádné nadání pro jazyky. To ovšem není až tak překvapující, protože – jak jsme už zmínili na začátku

LIDSKÉ KALKULAČKY

Početní výstupy na jevišti se rozmohly v 19. století – zázrační počtáři zde prováděli z hlavy aritmetické úkony, aby pobavili publikum. Brzy se stalo módou zařazovat je do čísel v evropských a amerických divadlech a jejich publikum tyto mentální výkony fascinovaly. Prvním řádně zdokumentovaným zázračným počtářem byl Zerah Colburn, narozený v roce 1804 v Cabotu ve Vermontu v USA. Při jednom vystoupení měl vynásobit 21 734 číslem 543. Téměř okamžitě odpověděl 11 801 562. Kdosi z publika se zeptal, jak to dokázal. „Uvědomil jsem si, že 543 je rovno třikrát 181. Tak jsem nejdřív vynásobil 21 734 třemi a výsledek 181," odpověděl Colburn, který později za své kariéry dokázal z hlavy vynásobit pětimístná čísla během pár vteřin. K uvedené události došlo v roce 1812, kdy mu bylo teprve osm let.

knihy – čísla a slova jsou ty nejrozšířenější abstraktní koncepty, které lidé používají. Dříve, dokud prakticky neexistovalo žádné zařízení, které by nám pomáhalo při výpočtech, byla schopnost provádět aritmetické operace v duchu silnou stránkou předních matematiků. Nešlo jenom o pouhé numerické výpočty, což spíše patřilo ke kouzelnickým vystoupením než k matematice. Velcí matematici jako Fermat, Mersenne, Euler a Ramanujan měli zázračný dar „nahlédnout do světa čísel“. Tato schopnost jim umožnila objevit vztahy, které dovedli ocenit jen oni sami a které si vyžadovaly důkazy, jež často překračovaly jejich schopnosti.