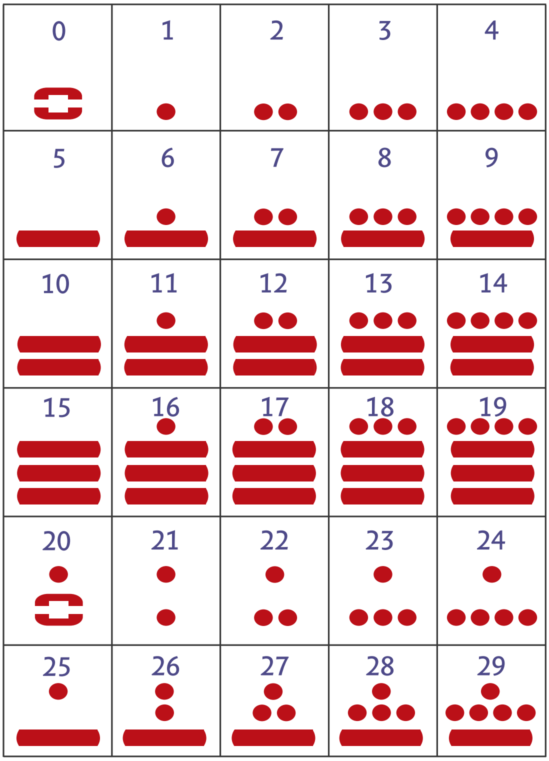


*Mayská civilizace byla jedna z prvních, která dokázala vytvořit poziční (dvacítkovou) číselnou soustavu. Užívali jen tři symboly: skořápka značila nulu, tečka jednu jednotku a vodorovná čárka pět jednotek.*

## Co je to prvočíslo?

Vezměme si libovolné číslo, třeba 12. Víme, že ho můžeme vyjádřit různými způsoby jako součin jiných čísel:

$$12 = 2 \times 6,$$
$$12 = 3 \times 4,$$
$$12 = 2 \times 2 \times 3.$$

Činitelům na pravé straně budeme nadále říkat „dělitelé“, takže můžeme říct, že 3 je dělitel 12. Dělitel je malé číslo, které je (beze zbytku) obsaženo ve větším, takže 3 je obsažena ve 12. Podobně můžeme říct, že 5 je dělitelem 20, protože 5 je obsažena ve 20. Být obsažen znamená v tomto kontextu, že když

20 dělíme 5, dostaneme přirozené číslo, v tomto případě 4, a zbytek dělení je nulový.

Pokud se zeptáme: „Jací jsou dělitelé čísla 12?“, odpověď zní: čísla 2, 3, 4 a 6, protože když jimi dělíme 12, dostaneme celé číslo. Množina dělitelů libovolného čísla bude také zahrnovat 1 (protože každé číslo je dělitelné jedničkou) i číslo samo. Například když se ptáme, která čísla jsou děliteli 18, odpovíme: čísla 1, 2, 3, 6, 9 a 18.

Předpokládejme, že si položíme stejnou otázku, ale pro číslo 7. Když zkoumáme jeho dělitele, zjistíme, že jsou to pouze čísla 1 a 7. Něco podobného platí i pro čísla 2, 3, 5, 11 a 13. Všechna tato čísla jsou „prvočísla“.

Teď už můžeme uvést přesnou definici, co jsou prvočísla: číslo nazýváme prvočíslem, když je dělitelné pouze jedničkou a sebou samým.

Naše úvahy o přirozených číslech vyžadovaly pouze operace násobení a dělení. Dospěli jsme k závěru, že některá čísla jsou zvláštní, a když jsme nalezli definici, která je popisuje všechny, použili jsme proces abstrakce. Takže když víme, jak se jmenují a jaké vlastnosti je definují, můžeme tato čísla hlouběji studovat.

## ĎÁBELSKÉ SYMBOLY

V temných dobách evropských dějin byly číslice neboli cifry považovány za tajemné znaky „tajného písma“ (odtud také pochází slovo „šifra“). Přesně vzato by šiframi měly být nazývány pouze zprávy, v nichž jsou písmena nahrazena čísly. Když se v Evropě objevily arabské číslice ve sloupcích ručních počitadel, „puristé“ je nahrazovali římskými číslovkami, aby vymýtili přítomnost těchto „ďábelských symbolů, jimiž Satan svedl Araby na scestí“. Ještě šest století po smrti papeže Silvestra II. († 1003) nechala církev otevřít jeho hrobku, aby se ujistila, jestli tam pořád ještě jsou démoni, kteří ho přiměli ke studiu saracénské nauky o číslech.

*Gerbert d'Aurillac se stal papežem Silvestrem II., matematicky celkem vzdělaným papežem.*

## Základní věta aritmetiky

Prvočísla jsou často nazývána „cihlami“ matematiky, matematickými „atomy“ nebo „genetickým kódem“ matematiky. Z cihel se staví domy, přírodní objekty se skládají z atomů a živé organismy jsou definovány svými genetickými kódy. Všechny tyto analogie mají jedno společné – existují zárodečné elementy, z nichž je celý objekt složený. Podívejme se teď, jakou roli hrají prvočísla v matematice.

Viděli jsme, že čísla mohou být rozložena na své dělitele – třeba 12 můžeme reprezentovat součinem 3 × 4. Když mluvíme o dělitelích, máme tím na mysli, že můžeme vytvořit 12 s pomocí čísel 3 a 4. Už také víme, že ho můžeme vytvořit i z jiných čísel, například

$$12 = 2 \times 6 = 3 \times 4 = 2 \times 2 \times 3.$$

Všechna tato čísla jsou děliteli čísla 12 a celý proces se nazývá *faktorizace*. Připomeňme, že to byla právě faktorizace, která nám umožnila přesnou definici prvočísel: jsou to čísla, jejichž děliteli jsou pouze jednička a číslo samo. Takže faktorizací prvočísla 13 je

$$13 = 1 \times 13.$$

Když se některý z dělitelů při faktorizaci vyskytuje vícekrát, připíšeme jako horní index počet opakování, například

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5,$$
$$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4.$$

V matematice takový výraz nazývají mocninou, $2^5$ se čte „dvě na pátou“ a $3^4$ „tři na čtvrtou“.

V jednom z výše uvedených příkladů jsme rozložili číslo 12 na tři součiny s různými faktory: 2 a 6; 3 a 4; 2, 2 a 3. Jenom poslední výraz obsahuje výhradně prvočísla. Vezměme si jiný příklad, třeba číslo 20:

$$20 = 2 \times 10 = 2 \times 2 \times 5 = 4 \times 5,$$

přičemž pouze součin $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5$ obsahuje výhradně prvočísla.

Takže si pokládáme otázku: když náhodně vezmeme libovolné číslo, je vždycky možné ho rozbít na prvočíselné dělitele? Neboli, lze ho vždy vyjádřit jako součin prvočísel? Odpověď zní ano. A nejenom to, lze to udělat pouze jediným možným způsobem. Když napíšeme 20 jako součin prvočísel, $20 = 2^2 \times 5$, tento rozklad je jednoznačný – všimněme si, že pořadí faktorů není podstatné, protože 2 × 5 × 2 = 5 × 2 × 2. Tento teorém je připisován Eukleidovi a nazývá se „základní věta aritmetiky“. Podle ní platí: „Každé přirozené číslo může být jednoznačně zapsáno jako součin prvočísel.“

Pokud tedy napíšeme 24 = $2^3 \times 3$, je to jediný možný rozklad na prvočísla. Pojmenování „základní věta“ je zcela oprávněné, je to totiž jeden ze základů, na nichž celá aritmetika spočívá. Teď je patrné, že prvočísla hrají životně důležitou roli. Když se vrátíme k výše uvedeným příměrům, můžeme říct, že DNA čísla 24 tvoří posloupnost genů $2^3$ a 3 nebo že 2 a 3 jsou atomy, které tvoří molekulu 24.

Takže prvočísla jsou zárodečné elementy, z nichž jsou vybudována všechna čísla, což odráží jejich pojmenování „prvočísla“, první mezi čísly. Tak jako se atomy kombinují a vytvářejí molekuly, prvočísla se kombinují a vytvářejí složitější čísla. Všechny chemické prvky jsou složeny z atomů, které se specifickým způsobem spojují s jinými atomy, a ruský chemik Dmitrij Ivanovič Mendělejev (1834–1907) je podle těchto vlastností srovnal do periodické tabulky. Pro prvočísla ale nic podobného neexistuje. Nemáme žádnou tabulku, v níž by prvočísla byla uspořádána podle nějakého pravidla, neexistuje zákon, kterým by je bylo možné generovat, aspoň ne takový, z něhož by nebyly výjimky. Prvočísla tvoří chaotickou množinu, není v ní žádný rytmus ani zákonitost, jsou rozložena zjevně náhodně mezi všemi přirozenými čísly.

## JAK NALÉZT PRVOČÍSELNÝ ROZKLAD

| | |
|---|---|
| 120 | 2 |
| 60 | 2 |
| 30 | 2 |
| 15 | 3 |
| 5 | 5 |
| 1 | |

Nejlepší metoda, jak provést faktorizaci nějakého čísla, je následující. Číslo, které rozkládáme, napíšeme vlevo od svislé čáry. Poté budeme zkoumat, zda je dělitelné 2, 3, 5, …, čili po řadě jednotlivými prvočísly. Pokud dělitelné je, napíšeme výsledek dělení vlevo, prvočíselného dělitele vpravo a na dalším řádku pokračujeme s výsledkem dělení, přičemž postupujeme tak dlouho, dokud není číslo na levé straně rovno jedné. Sloupec na pravé straně představuje prvočísla v rozkladu daného čísla.

## Prvočísla: vynález nebo objev?

Zkoumáme-li nějaké číslo, je logické ze všeho nejdřív vyzkoušet, zda je sudé, nebo liché. Dalším krokem je provést faktorizaci a tím nalézt kritéria dělitelnosti, která se děti učí ve škole. Kultura, která vytvořila početní systém, tudíž pracuje se souborem čísel definovaných jen několika málo vlastnostmi, které lze snadno určit. O prvočíslech to neplatí. S jistotou o nich víme jedinou věc: nejsou sudá – s výjimkou dvojky, jediného sudého prvočísla –, protože pak by byla dělitelná dvěma. Nemůžeme se k nim ale chovat jako k nějaké raritě, protože Eukleides dokázal, že jich je nekonečně mnoho – jeho elegantní důkaz uvedeme později. A nemůžeme podcenit jejich důležitost, jelikož základní věta aritmetiky jim zaručuje hvězdnou roli v matematice. Takže, jak už jsme uvedli, prvočísla si zasluhují, abychom se jimi zabývali.

Když mluvíme o vědeckém studiu nějakého objektu, je rozumné předpokládat, že daný objekt někde existuje. Mohl už být objeven nebo na objevení teprve čeká, můžeme ho zkoumat nebo ignorovat, ale každopádně dál existuje, ať už se jím zabýváme nebo ho ignorujeme. V určitém okamžiku dějin biologové začali zkoumat bakterie. Nikdo nepochybuje, že bakterie v živých organismech existovaly dřív, než se objevili biologové, dokonce dávno předtím, než se objevil lidský druh (na rozdíl třeba od ozubeného kola, které muselo být vynalezeno). Ve vědeckých kruzích o tom nikdo nepochybuje. Když ale jde o matematiku, situace je složitější. Jsou prvočísla vynálezem lidského mozku, nebo je lidé jen objevili? Existovala by prvočísla, i kdyby lidé neexistovali? Tyto otázky vyvolaly – a stále vyvolávají – bouřlivou diskusi, která někomu připadá důležitá a někomu ne. Nejspíše to je otázka, na niž nelze odpovědět – je to takříkajíc věc názoru.

*Univerzální význam matematických problémů navozuje otázku, zda čísla neexistují nezávisle na lidské mysli. Tato otázka trápila německého fyzika Heinricha Rudolfa Hertze.*

Když jde o povahu matematického myšlení, je opravdu důležité si uvědomit, že matematik je jako badatel vstupující na zvláštní, neznámé území a že matematiku vnímá jako něco vnějšího a odděleného. Tento pocit dobrodružství je součástí matematického bádání a dodává mu poetický nádech. Německý fyzik Heinrich Rudolf Hertz (1857–1894) položil otázku: „Je možné se nedomnívat, že matematické vzorce mají nezávislou existenci a inteligenci samy o sobě, že jsou moudřejší než my, dokonce moudřejší než ten, kdo je objevil, a že z nich vyzískáváme víc, než jsme do nich původně vložili?"

Filozofická (či přesněji gnozeologická) škola, která učí, že objekty (včetně matematických tvrzení) existují samy o sobě, je známá jako platonismus. Tvrdí, že člověk může zaujmout objektivní stanovisko pouze tehdy, když jsou objekty přítomny.

Historici matematiky mají sklon přijímat platonismus vzhledem k nezpochybnitelné univerzálnosti matematiky, neboť i kultury, které se výrazně liší svou minulostí i geografickou polohou, docházejí ke stejným závěrům a stejné objektivní pravdě. V případě prvočísel dokonce existuje zajímavý archeologický nález z prehistorie matematiky, a sice kost z Ishanga.

Na kosti jsou značky v podobě krátkých úseček. Podrobné studium nálezu ukázalo, že patrně nejde o zbraň, ale o pomůcku k počítání. V tom případě je pravděpodobné, že křemenný hrot sloužil k zaznamenávání výpočtů. Jinými slovy, kost rukojeti mohla sloužit jako primitivní kalkulátor. Rozložení značek ve sloupcích naznačuje, že šlo o sčítání a násobení v dvanáctkové číselné soustavě. Čísla vpravo jsou všechna lichá, ale opravdu překvapující je, že v levém sloupci jsou všechna čísla prvočísla mezi 10 a 20. Vypadá velice nepravděpodobně, že by všechny značky byly rozmístěny náhodně, bez použití pokročilé výpočetní metody. Vzpomeňme si, že zavést pojem prvočísel vyžaduje abstraktní myšlení, které překračuje pouhé elementární počty.

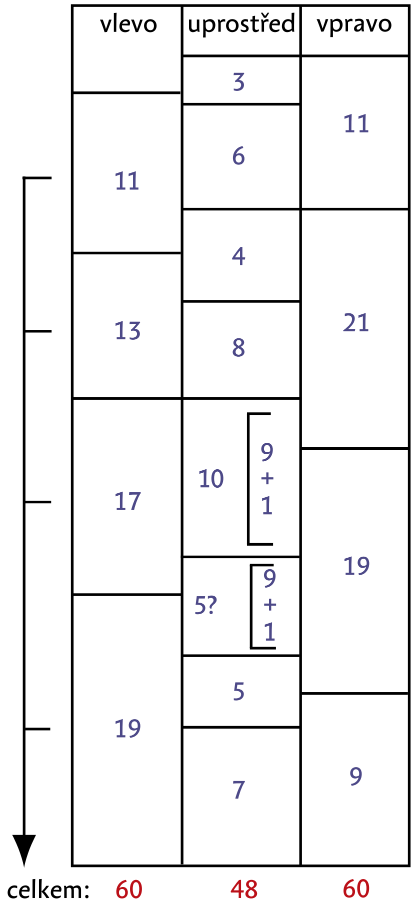


*Diagram kosti z Ishanga se znázorněním vrypů ve třech sloupcích. Zdá se, že kost byla používána k matematickým výpočtům.*