Kapitola 3

Soupeření s Eukleidem

Pátý postulát byl po mnoho staletí předmětem řady kritik a komentářů v dílech slavných geometrů. Většina z nich byla přesvědčena, že ho lze dokázat na základě prvních čtyř postulátů, a soustředila se proto na hledání jeho důkazu, aby ho konečně mohli zařadit mezi teorémy.

Po staletích matematického pokroku se však pátý postulát nikomu nepodařilo dokázat ani vyvrátit, a zároveň se nikomu nepodařilo prokázat nesprávnost geometrií, které ho odmítají.

Poslední řecký mistr

Na seznamu matematiků, kteří se pátý Eukleidův postulát pokusili dokázat, najdeme mnohá z nejslavnějších jmen v dějinách matematiky. Svým úsilím pomohli otevřít bránu do světa nových geometrií a jejich průkopnická díla by neměla upadnout v zapomnění.

I přes jejich genialitu byly však veškeré snahy marné. Všichni sice dokázali z pátého postulátu získat nějaké výsledky, ale nikdy nenašli onen kýžený důkaz. Jeden z prvních pokusů učinil Proklos v 5. století našeho letopočtu.

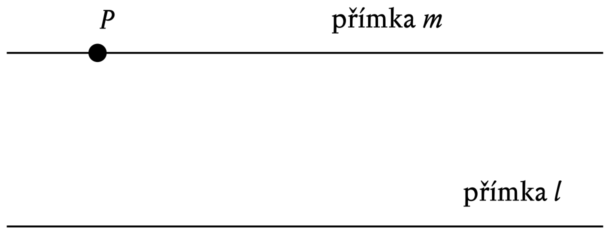
O pátém postulátu napsal několik komentářů, jako například tento:

> Měl by být úplně vymazán ze seznamu postulátů, protože je to teorém plný potíží, který se Ptolemaios pokusil dokázat ve své knize, a jeho důkaz vyžaduje různé další definice a teorémy. Obrácené tvrzení navíc v podstatě dokázal jako teorém sám Eukleides. Tvrzení, že „pokud jsou přímky neustále prodlužovány, mohou se protnout“, je sice věrohodné, ale není nezbytné. Pro tento teorém, který nesdílí zvláštní povahu postulátů, je tak očividně nutné najít důkaz.

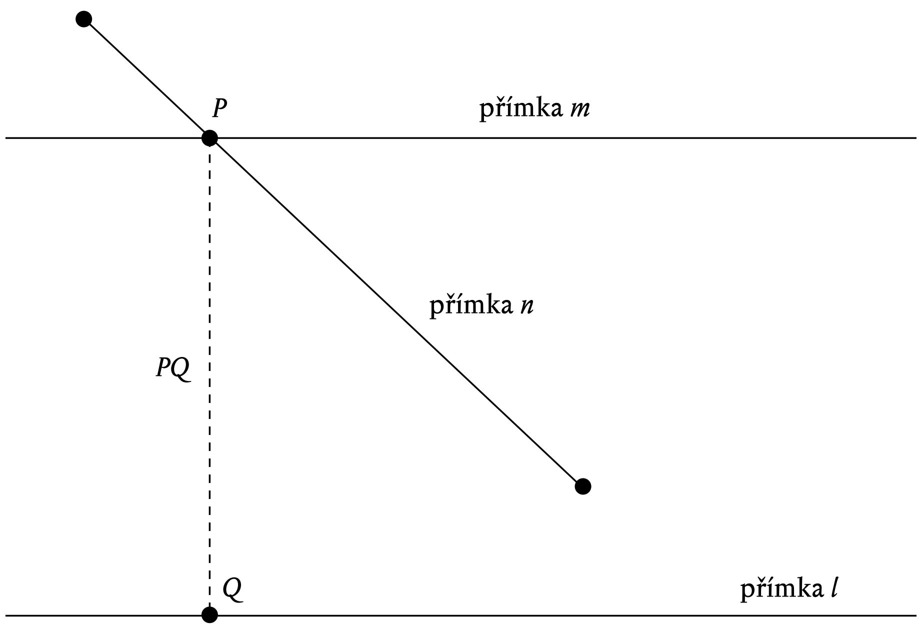
Proklos chtěl dokázat, že bodem *P*, který neleží na přímce *l*, může procházet pouze jedna přímka *m* rovnoběžná s *l*.

PROKLOS (410–485)

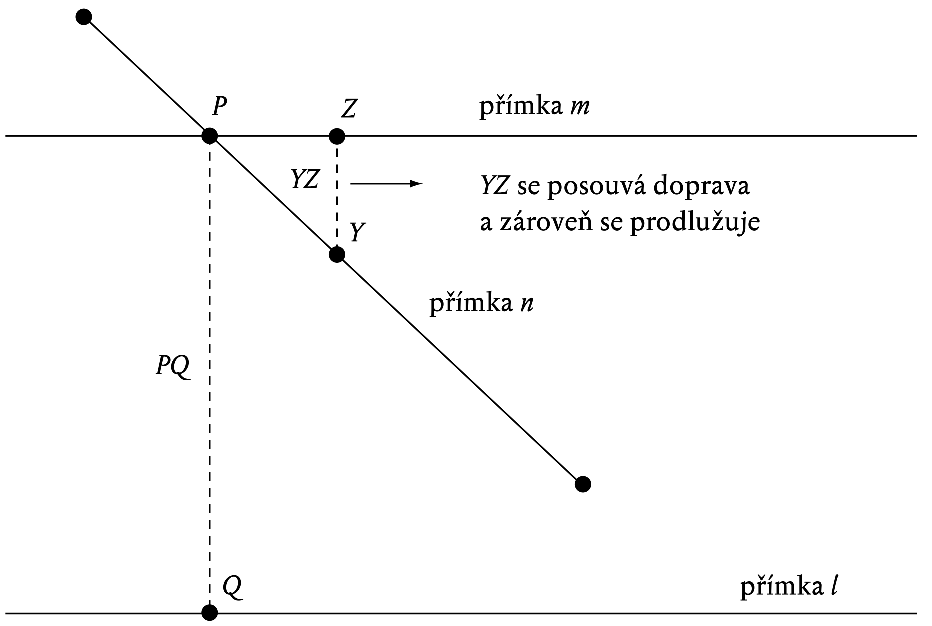
Řecký matematik Proklos se narodil v Konstantinopoli a zemřel v Aténách. Byl posledním významným pohanským učencem, pro své pohanství byl dokonce na jeden rok vykázán z Atén. Je autorem výjimečných komentářů k Ptolemaiovi a Eukleidovi, a patří proto mezi významné osobnosti rané řecké geometrie.



Vycházel z předpokladu, že bodem P prochází alespoň jedna rovnoběžka k l, kterou pojmenoval m. Dále chtěl dokázat, že jakákoliv jiná přímka, která prochází bodem P, musí protínat l, takže bodem P může procházet nanejvýš jedna rovnoběžka k l. Uvažoval proto přímku n, která prochází bodem P a není totožná s m, a bod Q, který je průsečíkem kolmice na přímku m s přímkou l.



Usoudil, že pokud úsečka *PQ* leží na přímce *n*, pak *n* protíná *l* v bodě *Q*. Co když ale *PQ* neleží na *n*? Potom lze uvažovat bod *Y*, který je průsečíkem přímky *n* a kolmice na přímku *m* spuštěné z bodu *Z*.



Na nákresu vidíme, že úsečka *PY* je obsažena v polorovině ohraničené přímkou *m* a určené úsečkou *YZ*, a tudíž bod *Y* (a tím zároveň i úsečku *YZ*) lze posunout doprava o libovolnou vzdálenost. Proklos poznamenal, že *YZ* se při posunu doprava prodlužuje (takže může dosáhnout libovolné délky). Protože je vzdálenost mezi *m* a *l* konstantní, musí *n* v určitém bodě protnout *l*. Tím Proklos zakončil svůj domnělý důkaz pátého postulátu.

Všimněme si však, že jeho důkaz předpokládá konstantní vzdálenost mezi *m* a *l*, takže z něj lze vyvodit nanejvýš to, že se *m* a *l* neprotínají.

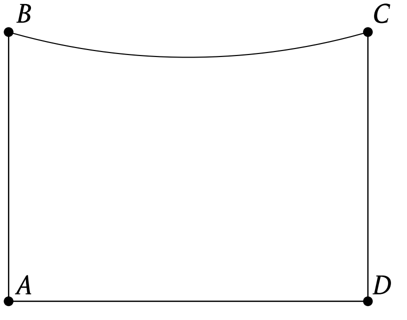
Kromě toho platí, že i neustále rostoucí hodnota může mít nějakou horní mez (limitu), které však nikdy nedosáhne, takže neplatí tvrzení, že *YZ* dosáhne libovolné délky. Proklos tedy pouze dokázal, že pátý postulát je ekvivalentní s tvrzením, že dvě rovnoběžky jsou od sebe v každém bodě stejně vzdálené.

Středověcí strážci řeckého poznání

Důkazem pátého postulátu se rovněž zabývali arabští matematici – mezi první z nich patřil Ibn al-Hajtham (965–1039), na Západě známý jako Alhazen. Na základě poznatku, že pokud jsou tři úhly ve čtyřúhelníku pravé, musí být pravý i ten čtvrtý, usoudil, že bodem neležícím na dané přímce prochází pouze jedna rovnoběžka k této přímce. Jeho důkaz vychází z faktu, že všechny body stejně vzdálené od dané přímky samy leží na jedné přímce. Všimněme si, že se také opírá o princip konstantní vzdálenosti, ačkoliv ho výslovně nezmiňuje. Jeho výchozí předpoklad, že pokud jsou tři úhly ve čtyřúhelníku pravé, musejí být pravé všechny, je opět ekvivalentní s pátým postulátem – dokazuje tedy pátý postulát na základě pátého postulátu.

Peršan Omar Chajjám (1048–1131) se kromě poezie v arabském světě i na Západě proslavil svým dílem z oblasti astronomie, algebry a zejména geometrie. Jeho nejslavnější spis *Pravda o rovnoběžkách a pojednání o slavné nejistotě* obsahuje úvahy o čtyřúhelnících, které dále rozvinul až o 600 let později italský matematik a filozof Saccheri.

Chajjám ve svých konstrukcích využíval čtyřúhelníky s vrcholy *A*, *B*, *C* a *D* takové, že strany *AB* a *CD* jsou shodné (je možné je přiložit na sebe tak, aby se dokonale překrývaly) a úhly u vrcholů *A* a *D* jsou pravé. Dokázal, že vrcholy *B* a *C* jsou také shodné, ale nedokázal, že jejich úhly musejí být pravé. Čtyřúhelník, který měl Chajjám na mysli, by mohl mít například takovýto podivný tvar:



Novověk

V období renesance přispěl nejvíce ke zkoumání pátého postulátu Christopher Clavius (1538–1612), který v roce 1584 vydal komentář k *Základům*. K Eukleidovým tvrzením přidal svá vlastní, a zvýšil tak jejich počet na 1 234.

V letech 1603–1607 připravil první vydání *Základů*, které se dostalo až do Číny. Na tomto textu později založili svoje bádání Saccheri a Descartes.

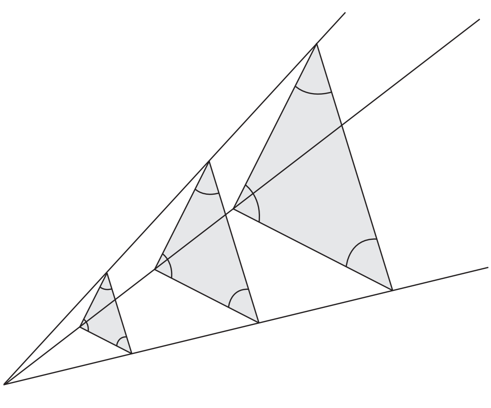
Pro svůj přínos k rozvoji *Základů* byl Clavius označován za „Eukleida 16. století“. Jeho dílo bylo na svou dobu velmi radikální a do dějin se zapsal i jinými počiny: jako hlavní zastánce gregoriánského kalendáře se zasadil o to, že po čtvrtku 4. října 1582 (podle juliánského kalendáře) následoval pátek 15. října 1582. Díky Claviovým výpočtům se změnil kalendář a z historie přitom zmizelo 10 dnů!

Clavius sestavil vlastní důkaz pátého postulátu, který však opět byl založen na argumentaci kruhem: čára, která je v každém bodě stejně vzdálená od přímky, je také přímkou. I přes jeho mnohé úspěchy se mu v otázce pátého postulátu nepodařilo doplnit a zdokonalit dílo velkého mistra.

Oxfordský profesor John Wallis (1616–1703), jeden z průkopníků moderní matematiky, představil novou interpretaci pátého postulátu, která princip stejné vzdálenosti nahradila trojúhelníky. Ukázal, že:

> Ke každému trojúhelníku lze sestrojit další, který má stejné úhly a poměry stran.

Toto tvrzení je však opět ekvivalentní s původním zněním pátého postulátu.



Všechny tyto argumenty selhaly při dokazování tvrzení, která vyplývají z pátého postulátu nebo jsou s ním ekvivalentní, protože využívaly tentýž chybný postup: dokazované tvrzení použily jako součást důkazu.

Saccheriho čtyřúhelník

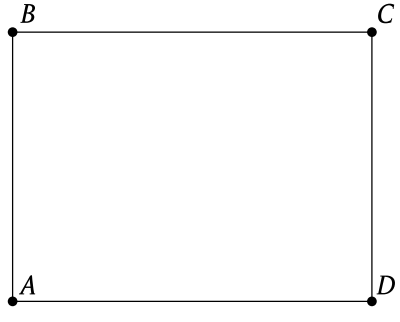
Pokrok v této oblasti se tak zcela zastavil až do příchodu Girolama Saccheriho. Tento italský matematik ve své argumentaci využil důkazu sporem. Tato metoda spočívá v tom, že předpokládáme opak dokazovaného tvrzení a logicky vyvodíme na základě tohoto předpokladu spor. Saccheri si nejdříve myslel, že skutečně objevil platný důkaz, ale později si uvědomil, že přesvědčivého sporu nedosáhl.

Jeho dílo naznačuje existenci jiných geometrií, které mohou vzniknout právě díky tomu, že nelze dojít ke sporu, který by tvrzení pátého postulátu vyvrátil. Aniž by si to sám uvědomoval, navrhoval nové geometrie, které pátý postulát nahrazují jeho negací.

Saccheri navazoval na Chajjámovo dílo a uvažoval stejný výchozí bod – čtyřúhelník *ABCD* se shodnými stranami *AB* a *CD* a pravými úhly u vrcholů *A* a *D*. Takto definované útvary dnes nazýváme „Saccheriho čtyřúhelníky“.

Aby Saccheri dokázal pátý postulát, chtěl ukázat, že úhly u vrcholů *B* a *C* jsou také pravé. Podle pátého postulátu jsou úhly u *B* a *C* shodné. Z toho vyplývají tři možnosti:

Hypotéza pravých úhlů – úhly u *B* a *C* jsou pravé.



GIROLAMO SACCHERI (1667–1733)

Saccheri jako mladý vstoupil do jezuitského řádu a učil nejdříve teologii na Jezuitské univerzitě v Miláně a později filozofii v Turíně. Neomezoval se však pouze na tyto disciplíny – na univerzitě v Pavii vyučoval matematiku a zabýval se Eukleidovým pátým postulátem. Své výsledky publikoval v díle *Euclides ab omni naevo vindicatus*.