Kapitola 6

Druhý pohled do nekonečna

Počítače jsou k ničemu. Poskytují pouze odpovědi.
Pablo Picasso

Pojďme se ještě jednou podívat na nekonečnost π, tentokrát způsobem, který bude trochu povědomější a pravděpodobně bude vyžadovat méně představivosti než myšlenkové pochody Georga Cantora.

Laureát Nobelovy ceny za fyziku Richard Feynman (1918–1988) objevil v desetinném rozvoji π podezřelou posloupnost devítek:

3,1415926535897	9323846264338	3279502884197	1693993751058
2097494459230	7816406286208	9986280348253	4211706798214
8086513282306	6470938446095	5058223172535	9408128481117
4502841027019	3852110555964	4622948954930	3819644288109
7566593344612	8475648233786	7831652712019	0914564856692
3460348610454	3266482133936	0726024914127	3724587006606
3155881748815	2092096282925	4091715364367	8925903600113
3053054882046	6521384146951	9415116094330	5727036575959
1953092186117	3819326117931	0511854807446	2379962749567
3518857527248	9122793818301	1949129833673	3624406566430
8602139494639	5224737190702	1798609437027	7053921717629
3176752384674	8184676694051	3200056812714	5263560827785
7713427577896	0917363717872	1468440901224	9534301465495
8537105079227	9689258923542	0199561121290	2196086403441
8159813629774	7713099605187	0721134**999999**…	

Ta začíná na 762. číslici a příznačně se nazývá „Feynmanův bod“. Pravděpodobnost náhodného výskytu šesti devítek za sebou je velmi nízká, pouhých 0,08 %. Má Feynmanův bod nějaký význam? To je další ze záhad čísla π.

Dalším případem vzácné struktury je posloupnost 0123456789, která byla objevena na 17 387 594 880. místě. Tentokrát to už nebyl Feynman, kdo ji našel, ale počítačový program.

Nyní se podívejme na magický čtverec Američana T. E. Lobecka. V magickém čtverci mají řádky, sloupce i diagonály stejný součet, v našem případě 65:

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Když ho použijeme na desetinný rozvoj π tak, že číslo *n* v každém poli čtverce určí, kolikátou číslici z rozvoje π vybereme do nového čtverce (například je-li první číslo 17, vezmeme sedmnáctou číslici π, což je 2, takže ji zapíšeme do prvního políčka), vykazují součty řádků a sloupců vzniklého čtverce pozoruhodnou pravidelnost:

2	4	3	6	9	24
6	5	2	7	3	23
1	9	9	4	2	25
3	8	8	6	4	29
5	3	3	1	5	17
17	29	25	24	23	

Vypadá to jako kouzelnický trik, ale není. V matematice nic jako kouzla neexistuje. Proč to tak je? Nevíme. Víme toho o π a nekonečnu stále tak málo…

Opice, klávesnice a knihovny

Pojďme se teď podívat na něco, co nevíme – a možná nikdy nebudeme vědět – o čísle π. Kromě toho, že se dostaneme na vrchol lidského myšlení a na hranici vědění, zabloudíme i do světa historek a legend.

Darwin a darwinismus mají speciální místo v anglosaské tradici. Vydáním své knihy *O vzniku druhů* se Charles Darwin dotkl mnoha „pravověrců“, protože tvrdil, že lidská evoluce šla stejnou cestou jako evoluce zvířat. Výrok „člověk pochází z opice“ je hrubé zjednodušení darwinovské teorie, ale stalo se biologickým paradigmatem. Jakákoli zmínka o opicích vzbuzuje mezi vědci kontroverze. Klávesnice (psacího stroje) byla ve viktoriánské době symbolem moderní technologie. Dejte opice a klávesnice do jedné místnosti a dostanete potenciálně výbušnou směs. V tomto klasickém myšlenkovém experimentu se mísí staré darwinovské ideje s těmi moderními.

Předpokládejme, že každý člen opičí rodiny dostane psací stroj. Na experimentech s makaky se ukázalo, že ve velkém produkují stránky popsané náhodnými písmeny a z nějakého záhadného důvodu je to velmi zajímá. Takže vůbec nebudeme myslet na to, že by se opice mohly chovat jinak, a budeme předpokládat, že i naše opice se chovají zodpovědně a píší náhodné znaky na prázdné papíry.

Takzvaná „teorie nekonečné opice“ říká, že pokud budou opice psát nekonečně dlouho, vytvoří téměř jistě srozumitelnou reprodukci textu, který už byl někdy napsán. To znamená, že pokud by neexistoval žádný časový limit, skupina opic by písmeno po písmenu napsala třeba *Romea a Julii*. Nebo tuto knihu.

V teorii pravděpodobnost „téměř jistě“ znamená „s pravděpodobností blížící se jedné“. To má velmi jednoznačný, matematický význam. Čímž nevylučujeme, že se po opravdu dlouhém čekání podíváme, co opice napsaly, a zjistíme, že to zatím nic rozumného není. Tato teorie bude fungovat jedině v případě, že čas jde do nekonečna. Pouze v takovém případě se pravděpodobnost blíží ke 100 %.

O něco poetičtější variací této teorie je povídka argentinského spisovatele Jorgeho Luise Borgese, který strávil mnoho času vysvětlováním vlastností nekonečna. Vděčíme mu také za mnoho vizionářských přístupů ke světu. V povídce Babylonská knihovna z knihy *Fikce* (1944) popisuje Borges knihovnu, která obsahuje úplně všechny knihy. Tato knihovna obsahuje ve svých knihách všechny existující permutace 25 základních znaků (22 hebrejských písmen, 2 interpunkce a mezeru), každá kniha má kolem 410 stran po 40 řádcích a 80 písmenech na každém, počítejme 1 312 000 písmen. Borgesova knihovna by pak musela obsahovat zhruba $25^{1\,312\,000} \approx 1{,}956 \times 10^{1\,834\,097}$ knih. (Atomů ve vesmíru je asi tak 10^{80} až 10^{100}.)

Kdyby měly opice dost času, napsaly by jakýkoli konečný text.

Nebudeme zde podrobně vypisovat rigorózní důkaz teorie o opicích u psacího stroje. Trvalo by to příliš dlouho a bylo by potřeba vysvětlit některé nudné aspekty teorie pravděpodobnosti. Zkusme ale alespoň stručně ukázat, že tato teorie je pravdivá. Předpokládejme, že klávesnice má 60 kláves. Známá věta z Hamleta „Být či nebýt" je posloupnost 12 znaků, a pravděpodobnost, že ji náhodně napíšeme na n pokusů, můžeme vyjádřit jako

$$1 - \left(1 - \frac{1}{60^{12}}\right)^n.$$

Pro $n \to \infty$ se celý výraz blíží k jedné, a pokud místo jedné opice zaměstnáme k opic, limita se nezmění, ale konvergence bude o něco rychlejší.

Další sofistikované úpravy vedou k očekávanému závěru. Z matematického hlediska není pochyb, že za dostatečně dlouhou dobu opice napíší celého *Hamleta*. Jakákoli kniha je v podstatě konečná posloupnost znaků a opice s neomezeným množstvím času by ji jistě napsaly, a tím spíše, kdybychom jich zaměstnali opravdu hodně.

Argentinský spisovatel Jorge Luis Borges popsal rozsáhlou knihovnu, ve které každé oddělení obsahuje 640 knih po 410 stranách.

Na druhou stranu, v běžném životě je velmi nepravděpodobné, že by se to v dohledné době mohlo stát. A k čemu je nám vůbec dobré vědět, že by opice byly schopné reprodukovat *Vojnu a mír*, když by na to potřebovaly čas delší, než je stáří celého vesmíru? Už jen k napsání něčeho smysluplného, ne nutně zrovna Shakespeara, ale jen třeba jediné holé věty, by opice potřebovaly obrovské množství času.

Jeden odborník na termodynamiku spočítal, že například reprodukce *Hamleta* je sice matematicky pravděpodobná, ale ve skutečnosti zcela nemožná. Vesmír je totiž konečný jak z hlediska počtu částic, tak z hlediska času. Ačkoli se v něm nachází možná až „googol" částic (googol = 10^{100}, jméno vymyslel devítiletý synovec matematika Edwarda Kasnera) a velký třesk se udál před asi 14 miliardami let, lze snadno spočítat, že i kdybychom každou částici nahradili opicí za psacím strojem a celý vesmír byl plný píšících primátů, je zcela mizivá pravděpodobnost, že by za celou historii vesmíru zvládly opice *Hamleta* napsat.

Borgesova povídka Babylonská knihovna je poetičtější a jistě si zaslouží více než jen naše převyprávění. Zde je proto jeden odstavec popisující tuto úžasnou knihovnu:

> Knihovna je završený celek a její regály zahrnují všechny možné kombinace (obrovský, i když nikoli nekonečný počet) pětadvaceti ortografických znaků, tedy všechno, co lze vyjádřit ve všech jazycích. Všechno: velice podrobnou historii budoucnosti, vlastní životopisy archandělů, přesný katalog Knihovny, tisíce a tisíce falešných katalogů, důkaz nesprávnosti pravého katalogu, gnostické evangelium Basileidovo, komentář k tomuto evangeliu, komentář ke komentáři k tomuto evangeliu, pravdivé vylíčení tvé smrti, překlad každé knihy do všech jazyků, interpolace každé knihy do všech knih, traktát o saské mytologii, který mohl napsat (a nenapsal) Beda, ztracené knihy Tacitovy. Všechno, ale na každý smysluplný řádek připadají miliony řádek zpřeházených znaků, nesmyslné hatmatilky a neexistujících slov.

Nekonečný rozvoj π

To, co jsme právě vylíčili, může vypadat víceméně zábavně, ale má to hlavně víc společného s π a jeho desetinným rozvojem, než by se mohlo zdát. Pokud bychom našim opicím dali místo velké klávesnice jen číselnou, dostali bychom místo náhodných posloupností písmen posloupnosti čísel – číselné řetězce. A co jiného je π než číselný řetězec?

Borgesovu konečnou knihovnu (ve které je většina textů jen nesmyslná hatmatilka) by pak nahradily konečné číselné řetězce se začátkem a koncem.

Existuje ovšem zásadní rozdíl mezi smyšlenými opicemi, Borgesovou knihovnou a desetinným rozvojem π. Spočívá v tom, že první dvě se týkají konečných výtvorů, kdežto π konečné není. Má nekonečně mnoho desetinných míst – přesněji řečeno spočetné nekonečno desetinných míst.

Žádná opice s psacím strojem by nikdy celé π nenapsala, ani by se nikdy nevešlo do žádné knihovny. Nahlédli jsme nesměle směrem do nekonečna, ale desetinný rozvoj π nás odtamtud už dávno pozoruje. Z nekonečné dálky.

Nedokazatelná normalita π

Je π normální? Paradoxně je tato otázka stále nezodpovězena a znovu a znovu si ji klade mnoho matematiků. Iracionální číslo je normální, pokud platí, že se v jeho v desítkovém zápisu číslice 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 objevují se stejnou frekvencí. A totéž musí platit i o dvojicích čísel, tedy 00–99, trojicích 000–999 a tak dál.

Pokud je číslo normální ve všech číselných soustavách, říká se mu absolutně normální.

Když Yasumasa Kanada vypočítal bilion číslic π, podíval se, kolikrát se která v rozvoji vyskytuje:

Číslice	Počet výskytů
0	99 999 485 134
1	99 999 945 664
2	100 000 480 057
3	99 999 787 805
4	100 000 357 857
5	99 999 671 008
6	99 999 807 503
7	99 999 818 723
8	100 000 791 469
9	99 999 854 780
Celkem	1 000 000 000 000

Kanadovo rozložení číslic neukazuje na žádné nepravidelnosti ani na to, že by se π odchylovalo od normality. Někdo by ovšem mohl považovat bilion položek za málo.

Ve skutečnosti zatím nebyla dokázána normalita čísel π, e, $\sqrt{2}$, log 2, dokonce ani zlatého řezu (Φ), ani žádné jiné známé konstanty. Vlastně nikdy nebyla dokázána normalita prakticky žádného čísla kromě těch, která byla vytvořena přímo k tomuto účelu. V roce 1917 prezentoval polský matematik Wacław Sierpiński (1882–1969) první normální číslo. Bylo stoprocentně normální.

Chaitinova konstanta

$$\Omega = 0{,}007\,874\,996\,99\ \ldots,$$