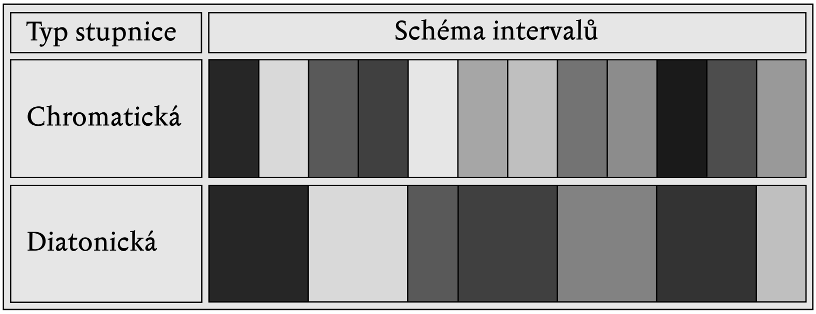


Tóny v chromatické stupnici jsou po řadě: c, cis, d, dis, e, f, fis, g, gis, a, b, h, c.
Tóny v diatonické stupnici jsou: c, d, e, f, g, a, h, c.

Problém s pythagorejským laděním podle intervalů spočívá v tom, že sice dobře funguje na nástrojích, jako jsou housle, ale těžko se v něm vytvářejí malé intervaly a zvýšené a snížené tóny (s křížky a béčky). Proto bylo zavedeno „rovnoměrné temperované ladění“: oktáva byla rozdělena na 12 stejných částí, kde každý následující tón je přesně $\sqrt[12]{2}$násobkem předchozího. Výsledná stupnice má 12 tónů a nazýváme ji chromatická.

Kde se vzala hodnota $\sqrt[12]{2}$? Řekněme, že chceme rovnoměrně rozdělit prostor mezi dvěma tóny s frekvencemi v poměru 2 : 1 na 12 stejných dílků, přičemž frekvence vyššího tónu je vždy stejným násobkem toho nižšího. Přesně takto funguje geometrická řada, kde násobíme vždy stejným koeficientem. Když vynásobíme jedničku hledaným číslem dvanáctkrát, musíme dostat dvojku. Tento požadavek splňuje právě číslo $\sqrt[12]{2}$. Posloupnost hledaných 12 tónů pak matematicky vypadá takto:

$$\sqrt[12]{2},\ (\sqrt[12]{2})^2,\ (\sqrt[12]{2})^3,\ (\sqrt[12]{2})^4,\ (\sqrt[12]{2})^5,\ (\sqrt[12]{2})^6,$$
$$(\sqrt[12]{2})^7,\ (\sqrt[12]{2})^8,\ (\sqrt[12]{2})^9,\ (\sqrt[12]{2})^{10},\ (\sqrt[12]{2})^{11},\ (\sqrt[12]{2})^{12} = 2.$$

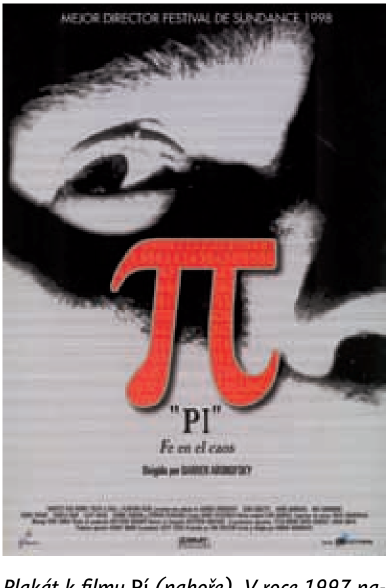
V 18. století byl vytvořen nový systém intervalů, kde kvinta byla 600 + + 300/π centů (oktáva má 1 200 centů). Toto ladění vytvořil Charles Lucy (*1946) a je po něm pojmenováno.

Další použití π v hudbě je spíše pro pobavení: je to možnost „poslechnout si“ vybranou část jeho desetinného rozvoje. Na internetu najdeme programy, které přiřadí každé číslici nějaký tón a vybranou část π vám „zahrají“. Musí se při tom vypořádat s několika problémy. Jednak máme 10 číslic, zatímco v oktávě je jen 7 celých tónů (intervalů). Také musíme vyřadit pasáže, ve kterých se dlouho opakuje stejná nota, protože ty by byly obzvláště nudné.

Mimoto jsou číslice π náhodné (alespoň nikomu se v nich nepodařilo objevit žádný řád), takže se posluchač brzy začne nudit. Nelze ovšem vyloučit, že i poslech dlouhé náhodné skladby může někomu udělat radost. Je to jen jeden z bizarnějších příkladů využití π.

Film, literatura a π

Situací, kdy se π objevilo na stříbrném plátně, bychom napočítali tisíce, i když většinou jde o pouhé zmínky, které mají přidat na přitažlivosti situacím s π nijak nesouvisejícím. Příkladem může být krycí jméno organizace v Hitchcockově filmu *Roztržená opona*. Málokdy se stává, že se dílo zabývá i matematickou podstatou π, a pokud ano, tak pouze povrchně a nepřesně, jako například ve filmu π (*Pí*) z roku 1998 od amerického režiséra Darrena Aronofského. Hlavním hrdinou filmu je geniální matematik Max Cohen a můžeme sledovat jeho postupný propad do spárů duševní choroby hraničící s šílenstvím, které je způsobeno posedlostí určitými čísly. Film si pohrává



Plakát k filmu Pí *(nahoře). V roce 1997 natočil Robert Zemeckis film* Kontakt *podle románové předlohy Carla Sagana. V knize mimozemšťané tvrdí pozemšťanům, že v čísle π je ukryta tajná zpráva (vpravo).*

s myšlenkou skrytého významu číslic podobného systému hebrejské kabaly. Snaha o dramatičnost příběhu ale naprosto přebíjí matematickou správnost.

Film, ve kterém π málem sehrálo významnou roli, byl úspěšný sci-fi snímek *Kontakt* z roku 1997 režírovaný Robertem Zemeckisem s Jodie Fosterovou v hlavní roli astronomky Eleanor Arrowayové. Mohl to být skvělý film s π ve druhé hlavní roli, ale konečný scénář naši konstantu značně potlačil. V knižní předloze *Kontakt* (1985) od renomovaného kosmologa Carla Sagana je však π extrémně důležité a kniha vyvolala i diskuse na vědecké úrovni. Ale jedno po druhém.

Kontakt je film o kontaktu s mimozemskými civilizacemi a o problémech, především náboženských, které by podobné spojení mohlo vyvolat. Hlavní postava, začínající vědkyně doktorka Arrowayová, má na starosti několik radioteleskopů, které zachytí signál z vesmíru, díky němuž je možné vytvořit přístroj na „červí díru" napříč vesmírem a navázat spojení s mimozemskou civilizací. Mimozemšťané Arrowayové předloží myšlenku, že v číslicích π je ukryta tajná zpráva o povaze vesmíru – ukrýt takovou zprávu do univerzální konstanty ovšem nemůže být dílem mimozemšťanů, to by mohl učinit jen Bůh, tvůrce vesmíru.

Zpráva je podle nich ukryta v určité části desetinného rozvoje π, kde existuje dlouhá sekvence nul a jedniček. Když tuto sekvenci uspořádáme do čtverce, získáme obrazec – kruh z nul ve čtverci z jedniček. Tento obrazec se v π nachází už od počátku vesmíru. Může za to Bůh? V následující kapitole se ještě jednou zastavíme u *Kontaktu* a u toho, proč je možné v desetinném rozvoji π najít takovýto čtverec a kruh.

V novodobé klasice humoristické literatury, *Stopařově průvodci Galaxií* od Douglase Adamse, byl vytvořen obří počítač, aby zodpověděl základní otázku Života, Vesmíru a vůbec. Odpověď zní – trochu překvapivě – 42. Někteří π-maniaci vzali tuto odpověď jako více než jen vtip, možná trochu jako provokaci, a pustili se do práce. Sekvence „42" pro ně byla příliš běžná, takže začali v desetinném rozvoji π hledat vzácnější kombinace, například „424242". Ta se objevuje na pozici 242 423, což vypadá velmi významně… Je jisté, že toto obskurní pátrání bude pokračovat.

Číslo π a zákony

Je trochu zvláštní narazit v této kapitole na část o zákonech a legislativě, tématech zdánlivě naprosto vzdálených číslu π. Ale s naším číslem se setkáme opravdu téměř všude. Například v roce 1836 žil v celkem pokrokové porevoluční Francii občan a vědec jménem La-Comm, který nejenže tvrdil, že π se rovná 3,25, ale dokonce obdržel ocenění od několika institucí za své objevy týkající se π. A to vše v době, když už bylo známo nejméně 100 číslic π.

Další, známější zpráva ze světa legislativy pochází z amerického státu Indiana. V roce 1897 zde Edward Goodwin, který dokonce publikoval jeden (byť jen krátký) text v časopise *American Mathematical Monthly*, ukázal svůj talent pro matematickou ekvilibristiku. Přesvědčil státní zákonodárce, aby hodnotu π stanovili zákonem (Bill 246), a málem k tomu opravdu došlo.

Na tom by pořád ještě nebylo nic divného, kdyby v zákoně nemělo být uvedeno, že

$$\pi = \frac{16\sqrt{2}}{7} \approx 3{,}232 \text{ (či podle jiné interpretace textu návrhu 3,2).}$$

Zákon také předpokládal zařazení této hodnoty do učebnic a platbu poplatků za autorská práva panu Goodwinovi. Ve zkratce, Goodwin i někteří zákonodárci ignorovali, že Lindemann už před 30 lety dokázal transcendenci π a s tím související nemožnost kvadratury kruhu, a ignorovali i to, že v té době už bylo vypočítáno nejméně 100 desetinných míst π, navíc hodně odlišných od uvedené hodnoty. Nic z toho poslance z Indiany neznepokojovalo.

Návrh prošel několika komisemi a byl předložen Senátu s doporučením, že by měl být schválen, k čemuž však již (tak trochu náhodou) nedošlo. Někdo totiž

Profesor matematiky Clarence Abiathar Waldo, který ochránil zákonodárce z Indiany před zesměšněním.

ukázal text zákona profesoru Clarenci Abiatharu Waldovi (1852–1926), který zrovna projížděl Indianou, a požádal ho, jestli by mohl k textu napsat předmluvu. Ten slušně odpověděl, že už má až po krk lidí, kteří se snaží dokázat kvadraturu kruhu. Když si ke svému zděšení plné znění zákona přečetl, přivedl nakonec senátory k rozumu a členové horní komory indianského Parlamentu slavný zákon 246 nakonec neschválili.

Číslo π a umění

V pařížském muzeu Palais de la Découverte je v jedné místnosti vlys věnovaný π; stal už se téměř symbolem tohoto místa. Vlys zobrazuje více než 600 desetinných míst π vypočítaných Williamem Shanksem v roce 1873. Tento přední britský matematik vypočítal dokonce celých 707 číslic, ovšem D. F. Ferguson v roce 1944 odhalil, že na 528. místě udělal chybu. Na jeho počest napsal Nicholas Rose následující limerik:

Sedm set a sedm, Shanks prý hned
číslic π že by vypočet.
A ti, co ho znaj,
dí, že pokus byl fajn,
jen v pět set osmadvacet se splet.

Vlys v muzeu Palais de la Découverte zobrazuje prvních 600 číslic π.

Skutečně umělecké dílo založené na π najdeme v Torontu a je výtvorem kanadské umělkyně Arlene Stampové: vstupní hala stanice metra Downsview je vyzdobena velkou mozaikou vytvořenou obdélníky o stejné šířce, které se různě překrývají. Velikost viditelné části každé dlaždice není náhodná, i když to tak vypadá – každá z nich odpovídá jedné číslici π. Z první dlaždice je vidět jedna desetina její plochy, což odpovídá první číslici „1" z 3,141 592 6535…, a tak to s číslicemi tohoto zázračného čísla pokračuje dál a dál.

Protože číslice π následují zdánlivě náhodně, nedá se v mozaice najít žádná pravidelnost, nicméně jak poukázal matematik Ivars Peterson, v této zdánlivé náhodnosti panuje řád.

Před vchodem Technické střední školy Henryho Abbotta v Danbury v Connecticutu stojí dvacetimetrová socha π vytvořená sochařkou Barbarou Grygu-

Vstup do stanice metra Downsview v Torontu. Barevné obdélníky jsou všechny stejně velké, ale navzájem se překrývají tím způsobem, že jejich viditelná část proporčně odpovídá číslicím desetinného rozvoje π.

tisovou. V noci svítí a studentům školy jistě dostatečně připomíná moc a sílu čísla π.

V Seattlu byla na přístavní hrázi dočasně umístěna socha π hned vedle uměleckého muzea.

Socha π od Barbary Grygutisové v Connecticutu.

Také u vchodu do Matematické fakulty Technické univerzity Berlín najdeme mozaiku s naší konstantou.

Za vrcholné dílo umění čisté matematiky lze považovat tuto rovnici:

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

která obsahuje pět nejdůležitějších matematických konstant (e, π, i, 1 a 0). Je považována za nejkrásnější rovnici všech dob. První, kdo ji představil a dokázal, byl švýcarský matematik Leonhard Euler.

V kapitole o π v umění stojí ještě za zmínku funerální umění – již proto, že je k vidění na náhrobku Ludolpha van Ceulena (1540–1610), po němž se v mnoha zemích π jmenuje „Ludolfovo číslo". Strávil mnoho času výpočty s mnohoúhelníky o 2^{62} stranách, čímž se dopracoval nejdřív k 20 a poté k 35 desetinným místům π. Jeho zápal pro toto číslo byl tak velký, že si přál, aby bylo vytesáno na jeho náhrobek pro poučení budoucích generací.

LEONHARD EULER (1707–1783)

Rodilý Švýcar Leonhard Euler byl jedním z nejvýznamnějších matematiků historie. Fenomenální paměť mu umožnila pokračovat v práci i poté, co oslepl, a to až do jeho smrti o 20 let později. Zemřel v Rusku, kde střídavě žil od roku 1737, nejprve na doporučení švýcarského kolegy Daniela Bernoulliho a později na pozvání Kateřiny II. Veliké. Na vydání Eulerova vědeckého díla dodnes pracuje Švýcarská akademie věd; zatím vyšlo 80 svazků z plánovaných 84. Euler byl tím, kdo definitivně schválil pro pí řecké písmeno π. Zavedl i další symboly, například $f(x)$ pro funkci proměnné x, „i" pro imaginární jednotku, „e" pro základ přirozených logaritmů a „Σ" pro sumaci.

Stojí za nespočetným množstvím dalších objevů; zanechal po sobě nesmazatelnou stopu v matematické analýze, teorii čísel, topologii, teorii grafů, fyzice a astronomii. Dokonce je po něm pojmenován jeden asteroid. Také objevil mnoho řad, ve kterých figuruje číslo π.

Sovětská známka z roku 1957 na památku 250. výročí Eulerova narození.

Podle mnoha odborníků patří k nejvyšším vrcholům matematického umění i formule skotského matematika Jamese Stirlinga (1692–1770), která vyjadřuje vztah faktoriálu celého čísla n, konstant e a π a jejich různých mocnin. (Faktoriál $n!$ je součinem všech přirozených čísel od 1 do n: $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times (n-1) \times n$.)

Lze ji zapsat jako

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n n!}{n^n \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$$

nebo v této podobě:

$$n! \approx \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-n} n^{n+1/2}.$$

Někteří matematici uvádějí, že je delší přemýšlení o tomto vzorci a jeho vnitřní kráse „šokovalo“ či „úplně vyvedlo z míry“. Našimi čtenáři snad tolik neotřese, přesto je mu třeba přiznat překvapivou myšlenkovou krásu.

Náhrobek Ludolpha van Ceulena v Leidenu s 35 číslicemi π, které spočítal.