$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618\,034$$

ZLATÉ ČÍSLO

Staří Řekové znali toto číslo vzhledem k jeho spojitosti s pravidelnými pětiúhelníky a dvanáctistěny studovanými eukleidovskou geometrií. Je úzce spojené s řadou Fibonacciho čísel (*kapitola* 8) a objasňuje některé zvláštní vzory ve stavbě rostlin a květů. Běžně se mu říká *zlaté číslo* – pojmenování, které zřejmě vzniklo mezi roky 1826 a 1835. Mnoho se mluví o jeho mystické a estetické hodnotě, ale většina těchto tvrzení je přehnaná: některá jsou výsledkem chybných měření a mnohá se nezakládají vůbec na ničem. Nicméně zlaté číslo skutečně má některé pozoruhodné matematické vlastnosti, včetně souvislosti s Fibonacciho čísly a výskytu ve světě kolem nás – zvláště v geometrických obrazcích pozorovaných u rostlin.

ŘECKÁ GEOMETRIE

Číslo φ (řecké „fí" – občas též značené jako τ, řecké „tau") se v matematice poprvé objevilo v Eukleidových *Základech* ve spojení s geometrií pravidelného pětiúhelníku. Tak, jak bylo v té době zvykem, bylo interpretováno geometricky, nikoli numericky.

Jak zakrátko ukážeme, pro φ existuje přesný vzorec. Na šest desetinných míst lze zapsat

$$\varphi = 1{,}618\,034$$

a na 100 míst

$$\begin{aligned}\varphi = 1{,}\,&618\,033\,988\,749\,894\,848\,204\,586\,834\,365\,638\\ &117\,720\,309\,179\,805\,762\,862\,135\,448\,622\,705\\ &260\,462\,818\,902\,449\,707\,207\,204\,189\,391\,137\,5.\end{aligned}$$

Charakteristická vlastnost φ se objeví, když vypočteme jeho převrácenou hodnotu $1/\varphi$, což (opět na šest míst) dává

$$\frac{1}{\varphi} = 0{,}618\,034.$$

Zdá se, že platí $\varphi = 1 + 1/\varphi$. Tento vztah může být přepsán ve tvaru kvadratické rovnice $\varphi^2 = \varphi + 1$ neboli v obvyklém tvaru

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0.$$

Vzorce pro řešení kvadratických rovnic dávají dvě řešení této rovnice:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{a} \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

v desetinném zápisu 1,618034 a −0,618034. Kladné řešení vezmeme jako definici φ, takže

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

a teď je skutečně pravda, že $\varphi = 1 + 1/\varphi$ přesně.

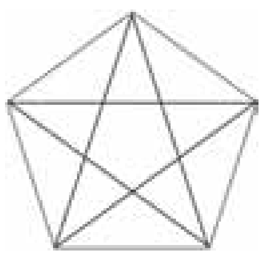
SPOJITOST S PRAVIDELNÝMI PĚTIÚHELNÍKY

Zlaté číslo se objevuje v geometrii pravidelného pětiúhelníku. Vezměme si pravidelný pětiúhelník s jednotkovou stranou. Nakresleme v něm pět úhlopříček, čímž vznikne pěticípá hvězda. Eukleides dokázal, že každá z diagonál má délku rovnou zlatému číslu.

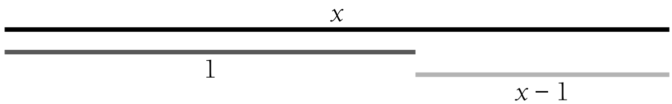
Přesněji řečeno Eukleides pracoval se „zlatým řezem“. Jde o takové rozdělení úsečky, v němž poměr delší části ku kratší je roven poměru celé úsečky k delší části.

K jakému číslu tento postup vede? Přidejme čísla: řekněme, že černá úsečka je dlouhá x a tmavě šedá má délku 1. Pak světle šedá úsečka je dlouhá $x - 1$. Takže uvedené poměry délek dávají rovnost

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1},$$



Obr. 102: Pravidelný pětiúhelník a jeho úhlopříčky.



Obr. 103: Poměr zlatého řezu: Poměr délky tmavě šedé úsečky (1) k délce světle šedé ($x - 1$) je roven poměru černé úsečky (x) k délce tmavošedé úsečky (1).

což vede na rovnici

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

To je rovnice, již jsme použili k definici zlatého čísla a z níž (jelikož jde o délku) potřebujeme kladné řešení, tedy $x = \varphi$.

Eukleides si povšiml, že délky úhlopříčky a strany pravidelného pětiúhelníku jsou v poměru zlatého řezu. To mu umožnilo zkonstruovat pravidelný pětiúhelník pomocí tradičních nástrojů, pravítka a kružítka (*kapitola* 17). Pravidelnému pětiúhelníku přikládali Řekové velkou důležitost, protože tuto podobu mají stěny jednoho z pěti pravidelných mnohostěnů, dvanáctistěnu. Vyvrcholením *Základů* je důkaz, že existuje přesně pět pravidelných těles (*kapitola* 5).

FIBONACCIHO ČÍSLA

Zlaté číslo je úzce spojeno s Fibonacciho čísly, která zavedl v roce 1202 Leonardo z Pisy (*kapitola* 8). Připomeňme, že posloupnost těchto čísel začíná následovně:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233.$$

Každé z čísel počínaje třetím je rovno součtu dvou předcházejících čísel: $1 + 1 = 2$, $1 + 2 = 3$, $2 + 3 = 5$, $3 + 5 = 8$ atd. Podíl dvou po sobě následujících Fibonacciho čísel se postupně stále více blíží zlatému číslu:

$$\begin{array}{ll}
\frac{1}{1} = 1, & \frac{21}{13} = 1{,}6153, \\
\frac{2}{1} = 2, & \frac{34}{21} = 1{,}6190, \\
\frac{3}{2} = 1{,}5, & \frac{55}{34} = 1{,}6176, \\
\frac{5}{3} = 1{,}6666, & \frac{89}{55} = 1{,}6181, \\
\frac{8}{5} = 1{,}6, & \frac{144}{89} = 1{,}6179, \\
\frac{13}{8} = 1{,}625, & \frac{233}{144} = 1{,}6181
\end{array}$$

a tuto vlastnost lze dokázat z pravidla, podle něhož tato posloupnost vzniká, a z kvadratické rovnice pro φ.

Platí to i naopak, Fibonacciho čísla můžeme vyjádřit pomocí zlatého čísla (*kapitola* 8):

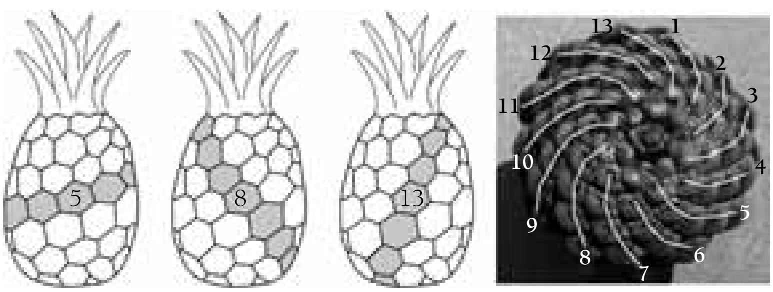
$$F_n = \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}}.$$

ZLATÝ ŘEZ U ROSTLIN

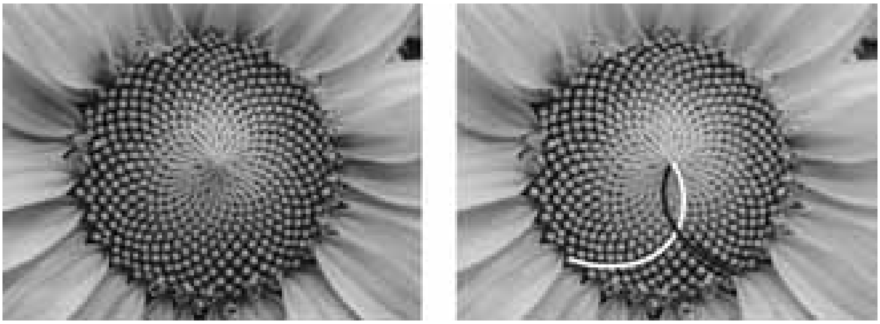
Je to už přes 2 000 let, co si lidé povšimli, jak běžná jsou v říši rostlin čísla, jež nyní známe jako Fibonacciho. Kupříkladu mnoho květin, zvláště příbuzných se sedmikráskami, má počet korunních lístků roven některému z Fibonacciho čísel. Měsíčky mají typicky 13 korunních lístků, astry 21. Mnoho sedmikrásek má 34 korunních lístků, a když ne, tak 55 nebo 89. Slunečnice jich mají obvykle 55, 89 nebo 144.

Ostatní čísla se vyskytují vzácněji: kupříkladu fuchsie mají 4 korunní lístky. Tyto výjimky se často shodují s Lucasovými čísly 4, 7, 11, 18 a 29, která vznikají stejně jako Fibonacciho čísla, když prvními dvěma čísly jsou 1 a 3. Několik příkladů je uvedeno níže.

Stejná čísla se vyskytují i u jiných částí rostlin. Ananas má na povrchu přibližně šestiúhelníkovou strukturu; tyto šestiúhelníky jsou jednotlivé plody, které splynou během růstu. Spojují se do dvou do sebe zapadajících skupin spirál. Jedna skupina se otáčí proti směru pohybu hodinových ručiček a obsahuje osm spirál; druhá skupina se otáčí po směru pohybu hodinových ručiček a obsahuje 13 spirál. Lze rozeznat i třetí skupinu pěti spirál otáčejících se po směru pohybu ručiček v tupějším úhlu.



Obr. 104: *Vlevo*: Tři skupiny spirál na povrchu ananasu. *Vpravo*: Skupina 13 spirál točících se proti směru otáčení hodinových ručiček na borové šišce.



Obr. 105: Fibonacciho spirály v květním lůžku slunečnice. *Vlevo*: Uspořádání semen. *Vpravo*: Spirály patřící k dvěma odlišným skupinám: točícím se po směru otáčení hodinových ručiček (světle šedá) a proti směru (tmavě šedá).

Šupiny borových šišek tvoří podobné spirály. Totéž lze říct o semenech v lůžku zralé slunečnice s tím rozdílem, že tentokrát spirály leží v rovině.

Klíčem ke geometrii slunečnicových spirál je zlaté číslo, které pak vysvětluje přítomnost Fibonacciho čísel. Když rozdělíme plný úhel 360° na dva oblouky v poměru zlatého řezu, to jest tak, aby úhel u většího oblouku byl φ-násobkem úhlu u menšího oblouku, pak menší z úhlů je $1/(1 + \varphi)$ násobkem plného úhlu. Tento úhel – zvaný zlatý úhel – je přibližně 137,5°.

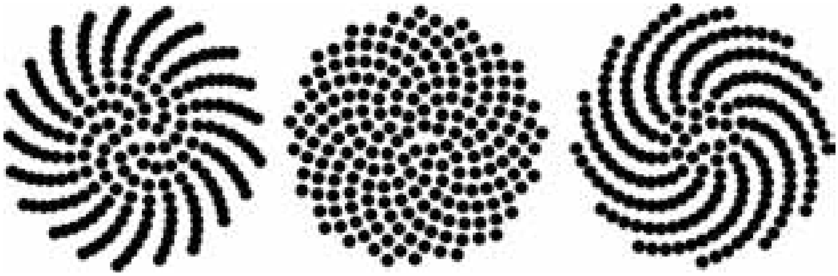
V roce 1868 si německý botanik Wilhelm Hofmeister všiml, jak se mění během růstu stonek rostliny, a položil základy ke všemu následnému studiu tohoto problému. V podstatě je vývin určen chováním rostoucí špičky a závisí na malém shluku buněk známých jako primordia; z těch nakonec vzniknou semena. Hofmeister zjistil, že tyto buňky leží na spirále. Každá je oddělena od předchozí zlatým úhlem A, takže n-té semeno leží odkloněno o úhel nA. Přitom vzdálenost od středu je úměrná odmocnině z n.

Toto pozorování vysvětluje uspořádání semen v květním lůžku slunečnice. Vzniká tak, že semena se postupně ukládají v úhlech, které jsou celistvými násobky zlatého úhlu, přičemž jejich vzdálenost od středu je úměrná odmocnině z pořadového čísla semena. Když označíme zlatý úhel A, pak jsou semena ukládána v úhlech

$$A, \quad 2A, \quad 3A, \quad 4A, \quad 5A, \quad 6A, \quad \ldots$$

a jejich vzdálenosti jsou úměrné

$$1, \quad \sqrt{2}, \quad \sqrt{3}, \quad \sqrt{4}, \quad \sqrt{5}, \quad \sqrt{6}, \quad \ldots.$$



Obr. 106: Rozmístění semen v úhlech 137°, 137,5° a 138°. Jenom zlatý úhel umožňuje kompaktní uspořádání bez mezer.

U květin, jako jsou sedmikrásky, se korunní lístky vytvářejí na konci spirál, takže Fibonacciho čísla počtu spirál vedou k Fibonacciho číslům pro počet korunních plátků. Ale proč se Fibonacciho čísla objevují ve spirálách?

Kvůli zlatému úhlu.

Helmut Vogel studoval v roce 1979 geometrii slunečnicových semen a vysvětlil, proč se v ní vyskytuje zlatý úhel. Zkoumal, jak by vypadalo lůžko slunečnice, kdyby se semena ukládala po stejné spirále, ale s úhlem nepatrně odlišným od zlatého úhlu 137,5°. Pouze zlatý úhel vede k tomu, že semena jsou těsně jedno vedle druhého, nejsou mezi nimi ani mezery, ani se nepřekrývají. Tím se vysvětlilo, že zlatý úhel je opravdu výjimečný, že nejde jenom o náhodný výskyt.

Nicméně úplné vysvětlení je ještě hlubší. Jak buňky rostou a pohybují se, působí silově na sousední buňky. V roce 1992 studovali Stéphane Douady a Yves Couder mechanické poměry v takovýchto systémech jak experimentálně, tak pomocí počítačových simulací. Zjistili, že úhly mezi po sobě jdoucími semeny jsou aproximací zlatého úhlu v podobě Fibonacciho zlomků.

Jejich teorie také vysvětluje překvapující výskyt počtu korunních plátků, které nejsou Fibonacciho čísly, jako jsou čtyři plátky u fuchsie. Tyto výjimky souhlasí s řadou Lucasových čísel:

$$1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ 18,\ 29,\ 47,\ 76,\ 123,\ \ldots.$$

Vzorec generující Lucasova čísla má tvar

$$L_n = \varphi^n + (-\varphi)^{-n},$$

což je velice podobné výše uvedenému vzorci pro Fibonacciho čísla.

Čtyři korunní plátky fuchsie jsou jedním příkladem Lucasova čísla. Některé kaktusy mají 4 spirály v jednom směru a 7 v druhém, nebo 11 v jednom směru a 18 v druhém. Echinokaktusy mají 29 žeber. Skupiny o 47 a 76 spirálách byly nalezeny u slunečnic.

Jednou z hlavních oblastí aplikované matematiky je teorie pružnosti, která studuje, jak se materiály, na něž působí síly, ohýbají nebo praskají. Tato teorie kupříkladu objasňuje, jak se chovají kovové nosníky nebo desky v budovách či mostech. V roce 2004 Patrick Shipman a Alan Newell aplikovali teorii pružnosti na model rostoucí rostliny se zvláštním zřetelem na kaktusy. Modelovali vytvoření květního primordia jako prasknutí špičky výhonku a ukázali, že to vede ke vzniku současně se šířících vln. Složení těchto vln má různou podobu, kterou určují dva faktory: vlnočet (počet vln na jednotku délky) a směr vln. Nejdůležitějším případem je interference tří vln, přičemž vlnočet jedné z vln je součtem vlnočtů dvou zbývajících vln. Spirály na ananasu jsou příkladem – vlnočty jsou 5, 8 a 13. Jejich teorie vystopovala Fibonacciho čísla přímo v matematickém popisu vln.

A jak to vypadá z hlediska biochemie? Vytváření květního primordia je vyvoláno hormonem zvaným auxin. Podobná vlnová pole vznikají i v rozdělení koncentrace auxinu. Úplné vysvětlení Fibonacciho čísel a zlatého úhlu v životě rostlin tedy vyžaduje souhru mezi biochemií, mechanickými silami mezi buňkami a geometrií. Auxin vyvolá růst primordia. Primordia na sebe silově působí. Geometrie zásadním způsobem ovlivňuje biochemii tím, že vyvolá produkci dalšího auxinu na určitých místech. Existuje tedy složitý systém zpětných vazeb mezi biochemií, mechanikou a geometrií.