IX. ŽIVOT, VESMÍR A …

Je 42 *opravdu* tím nejnudnějším číslem, které známe?

42

VŮBEC TO NENÍ NUDNÉ ČÍSLO

Tak jsme hned zkraje prozradili, o co nám půjde.

Jak jsme si řekli v úvodu, vystupuje toto číslo zásadním způsobem v knize Douglase Adamse *Stopařův průvodce Galaxií*, kde představuje odpověď na „Základní otázku života, vesmíru a vůbec". Tato objevná odpověď okamžitě vedla k další otázce: jak vlastně zní ta základní otázka života, vesmíru a vůbec?

Adams později vysvětlil, že zvolil tohle číslo, protože mu krátký průzkum mezi přáteli ukázal, že to je absolutně nezajímavé číslo. Rád bych bránil číslo 42 proti této pomluvě. Přiznávám, že 42 se co do matematické důležitosti nemůže rovnat číslům jako 4 nebo π, nebo dokonce 17, ale také není tak úplně nezajímavé. Je to obdélníkové číslo, Catalanovo číslo a magická konstanta nejmenší magické krychle. Plus ještě pár dalších věcí.

OBDÉLNÍKOVÉ ČÍSLO

Obdélníkové číslo je součin dvou po sobě jdoucích (kladných) celých čísel. Má tudíž tvar $n(n + 1)$. Když $n = 6$, obdržíme $6 \times 7 = 42$. Jelikož n-té trojúhelníkové číslo má tvar $\frac{1}{2}n(n + 1)$, je obdélníkové číslo dvakrát tak velké. Je to tudíž součet prvních n sudých čísel. Je-li počet terčíků dán obdélníkovým číslem, můžeme terčíky seřadit do obdélníku, jehož jedna strana je o 1 větší než druhá.

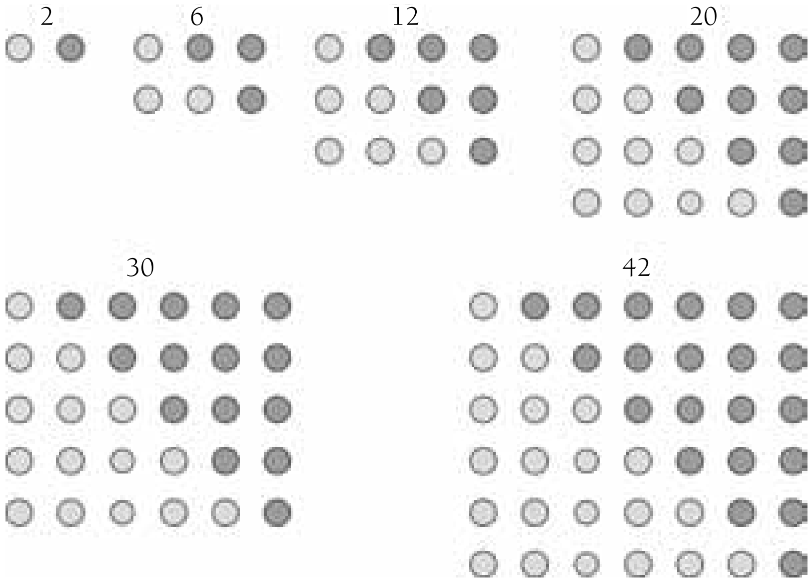
Traduje se, že mladičký Gauss dostal ve škole za úkol sečíst čísla

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 100.$$

Okamžitě si všiml, že když pod první řadu napíše týž součet v opačném pořadí:

$$100 + 99 + 98 + 97 + \ldots + 1,$$

mají pod sebou stojící čísla týž součet 101. Jelikož takových dvojic je 100, je součet dvojic roven $100 \times 101 = 10\,100$, což je obdélníkové číslo. Odpověď



Obr. 176: Prvních šest obdélníkových čísel. Tmavé terče ukazují, proč je obdélníkové číslo dvakrát větší než trojúhelníkové.

učiteli tudíž je 5 050. Nevíme ovšem, jestli je tohle opravdu úloha, kterou učitel třídě dal, děti nejspíš dostaly obtížnější úlohy. Pokud obtížnější byly, tím větší musel být Gaussův matematický důvtip.

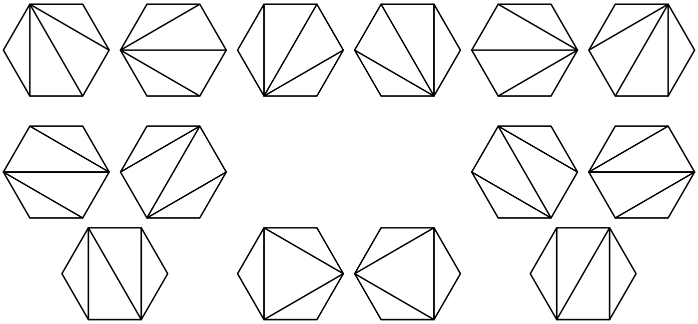
ŠESTÉ CATALANOVO ČÍSLO

Catalanova čísla se objevují v mnoha kombinatorických úlohách: udávají, kolika způsoby se dá provést daná matematická úloha. Poprvé se tato čísla objevila, když Euler počítal, kolika způsoby může být mnohoúhelník pospojováním svých vrcholů rozdělen na trojúhelníky. Později Eugène Catalan objevil souvislost těchto čísel s algebrou: udávají, kolika způsoby lze vložit do součtu nebo součinu závorky. K tomu se za chvilku vrátíme, nejdříve uveďme pár těchto čísel:

1 1 2 5 14 42 132 429 1430 4862.

Existuje pro ně předpis pomocí faktoriálů:

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,n!}.$$



Obr. 177: Čtrnáct různých triangulací šestiúhelníku.

Pro velká n existuje dobrá aproximace

$$C_n \approx \frac{4^n}{n^{3/2}\sqrt{\pi}},$$

což je další vzorec, kde se vyskytuje π v problému bez zřejmé souvislosti s kružnicemi.

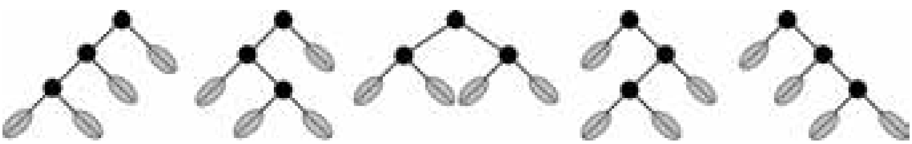
Číslo C_n udává počet různých způsobů, jak rozdělit $(n + 2)$-úhelník na trojúhelníky.

Udává rovněž počet binárních stromů s $n + 1$ listy. Binární strom začíná terčíkem (kořenem) a z něj vyrůstají dvě větve. Každá větev končí buď terčíkem, nebo listem. Z každého nového terčíku musí vyrůst dvě nové větve.

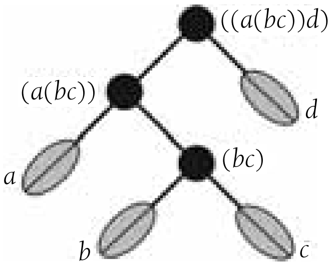
Pokud vám tahle interpretace připadá příliš ezoterická, vězte, že má přímou souvislost s algebrou: číslo $C_3 = 5$ udává počet různých uzávorkování součinu, jako je $abcd$:

$$((ab)c)d \quad (a(bc))d \quad (ab)(cd) \quad a((bc)d) \quad a(b(cd)).$$

Obecně udává C_n počet různých uzávorkování $n + 1$ symbolů. Abychom tuto souvislost demonstrovali, zapíšeme symboly vedle listů stromu a přidáme závorky podle toho, které dvojice se v terčíku setkají. Na obr. 179 jsme označili listy zleva doprava písmeny a, b, c a d.



Obr. 178: Pět binárních stromů se čtyřmi listy.



Obr. 179: Přeměna binárního stromu v algebru.

Když postupujeme zdola nahoru, napíšeme (bc) vedle terčíku, kde se spojují b a c. Nový terčík tudíž odpovídá (a(bc)). Horní terčík odpovídá místu, kde se připojí d, takže jeho označení je (a(bc)d).

Mnoho dalších kombinatorických problémů vede na Catalanova čísla; ten výše popsaný je jen nejjednodušší k vysvětlení.

MAGICKÉ KRYCHLE

Magická konstanta magické krychle 3 × 3 × 3 je 42. Taková krychle obsahuje čísla 1, 2, 3, … , 27 a součet vodorovně, svisle i podél hlavních diagonál krychle je týž – magická konstanta. Součet všech čísel krychle je 1 + 2 + … + 27 = 378. Když to rozdělíme do devíti paralelních trojic, které mají týž součet, musí být magická konstanta rovna $\frac{378}{9} = 42$.

Taková uspořádání existují, na obrázku níže je jedno z nich.

1	17	24
15	19	8
26	6	10

23	3	16
7	14	21
12	25	5

18	22	2
20	9	13
4	11	27

Obr. 180: Tři vrstvy magické krychle o velikosti 3 × 3 × 3.

DALŠÍ MIMOŘÁDNÉ VLASTNOSTI

- 42 udává počet možných rozdělení čísla 10, tedy počet možností, jak zapsat 10 jako součet přirozených čísel srovnaných podle velikosti, např.

$$1 + 2 + 2 + 5 \quad \text{nebo} \quad 3 + 3 + 4.$$

- 42 je druhé číslo, které lze obdržet jako součin tří různých prvočísel: 42 = = 2 × 3 × 7. První taková čísla jsou:

$$30,\ 42,\ 66,\ 70,\ 78,\ 102,\ 105,\ 110,\ 114,\ 130.$$

- 42 je třetí patnáctiúhelníkové číslo – analogie trojúhelníkových čísel, ale odvozených od pravidelného patnáctiúhelníku.
- 42 je super-multiperfektní: součet dělitelů součtu dělitelů (včetně 42) je šestinásobek čísla 42.
- Po dlouhou dobu bylo 42 nejlepší mírou iracionality π – kvantifikací, „jak moc iracionální" je π. V roce 1953 totiž Kurt Mahler odvodil, že

$$\left|\pi - \frac{p}{q}\right| \geqq \frac{1}{q^{42}}$$

  pro každé racionální p/q. Až v roce 2008 zaměnil V. Ch. Salichov číslo 42 za 7,606 308 53, takže v této souvislosti ztratilo půvab.
- 42 je třetí primární pseudoperfektní číslo. Taková čísla splňují podmínku

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_K} + \frac{1}{N} = 1,$$

  kde p_j jsou od sebe různí prvočíselní dělitelé N.
  Prvních několik primárních pseudoperfektních čísel je:

$$2,\ 6,\ 42,\ 1\,806,\ 47\,058,\ 2\,214\,502\,422,\ 52\,495\,396\,602.$$

- 42 je číslo n, pro které platí, že existují čtyři různá kladná celá čísla a, b, c, d menší než n, pro něž jsou výrazy $ab - cd$, $ac - bd$ a $ad - bc$ dělitelné n. Je to jediné *známé* číslo s touto vlastností, ale není známo, zda neexistují i další.
- 42 je nejmenší dimenze, pro niž bylo *dokázáno*, že salámová domněnka platí (*kapitola* 56). Ale předpokládá se, že totéž platí pro všechny dimenze větší než 5, takže význam 42 v tomto kontextu závisí na momentálním stavu vědění.

Takže vidíte? Vůbec to není nudné číslo!