KAPITOLA SEDMÁ

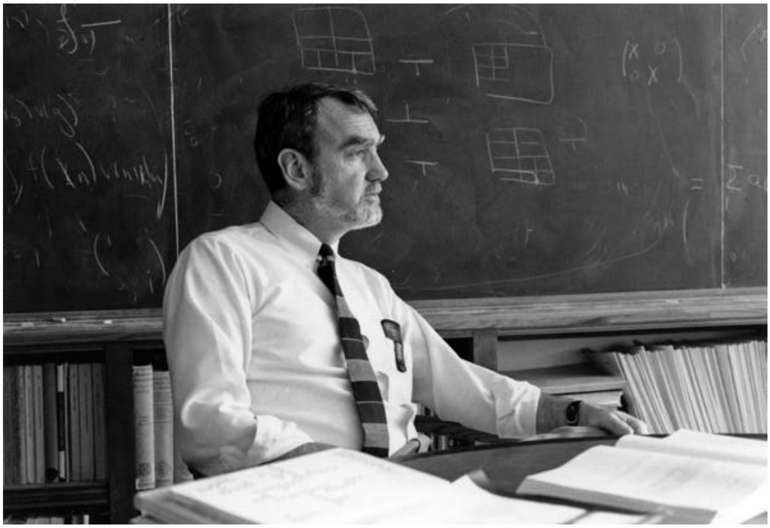
SJEDNOCENÁ TEORIE

Řešení prvního problému pro mě bylo jako rituální zasvěcení do tajného řemesla matematiky. Byla to šťastná náhoda, že mě následující matematický projekt, na kterém jsem s Fuksem pracoval, přivedl k jádru Langlandsova programu, jedné z nejhlubších a nejvíce vzrušujících matematických teorií, které vznikly za posledních 50 let. O svém projektu vám budu vyprávět později. Cílem této knihy je mnohem víc než jen popsat mou osobní zkušenost. Jejím cílem je ukázat zázraky moderní matematiky a dokázat, že záleží především na představivosti a průkopnickém myšlení. Langlandsův program je toho skvělým příkladem. Lze ho vnímat jako sjednocenou teorii veškeré matematiky, protože odkrývá a zdůrazňuje skryté a nečekané souvislosti mezi různými matematickými obory.

Matematika se skládá z mnoha podoblastí. Často se zdá, že je jejich obsah odlišný a že matematici, kteří v těchto podoblastech pracují, mluví různými jazyky. A právě proto je myšlenka „sjednocení" zdánlivě různorodých oblastí do jednoho uceleného systému natolik významná. Je to, jako bychom najednou porozuměli cizímu jazyku, který jsme se zoufale snažili naučit.

Je užitečné o matematice přemýšlet jako o jedné velké skládačce, u které nevíme, jak bude na konci vypadat. Řešení této skládačky je kolektivním dílem tisíců lidí. Ti pracují ve skupinách podle svých oborů: máme algebraiky, matematiky zabývající se teorií čísel, geometry a tak dále. Každá skupina již vytvořila malý „ostrůvek" ve velkém obraze, ale po většinu historie matematiky nebylo zřejmé, jak by se tyto ostrůvky mohly jednoho dne spojit. Většina matematiků dodnes pracuje na rozšiřování svých ostrůvků a pouze čas od času se najde někdo, kdo zahlédne určité souvislosti. Když k tomu dojde, odhalí se stěžejní prvky celkového obrazu, což dává souvisejícím matematickým oblastem nový význam.

Přesně to udělal Robert Langlands, s tou výjimkou, že se nesnažil propojit pouze několik ostrůvků. Langlandsův program, který odstartoval ke konci



Obr. 17: Robert Langlands ve své pracovně v Princetonu, 1999. Fotografie Jeff Mozzochi.

60. let, se stal pokusem o nalezení mechanismu, který nám pomůže propojit mnoho oblastí bez ohledu na jejich zdánlivou nesourodost a nepropojenost.

Langlands je nyní emeritním profesorem matematiky v Institutu pokročilých studií v Princetonu, kde sedí v pracovně, kterou dříve obýval Albert Einstein. Je to neobyčejně talentovaný muž s neuvěřitelným přehledem. Narodil se v roce 1936 a vyrostl v jednom městečku nedaleko Vancouveru, kde jeho rodiče podnikali ve dřevozpracujícím průmyslu. U Langlandse je zarážející, že mluví mnoha jazyky: anglicky, francouzsky, německy, rusky a turecky, přestože před nástupem na vysokou školu neuměl kromě rodné angličtiny žádný další jazyk.[1]

Měl jsem s ním možnost úzce spolupracovat a naše konverzace často probíhala v ruštině. Jednoho dne mi poslal seznam ruských autorů, které četl v originále. Tento seznam byl tak rozsáhlý, že snad přečetl více ruské literatury než já, ač je ruština mým rodným jazykem. Často jsem si říkal, zda Langlandsovy jazykové dovednosti nějak souvisí s jeho schopností propojovat různé oblasti matematiky.

Ústředním bodem Langlandsova programu je pojem symetrie, se kterým jsme se již seznámili. Mluvili jsme o symetrii v geometrii: například že libovolné otočení kulatého stolu je jeho symetrií. Studium těchto symetrií nás zavedlo k pojmu grupy. Pak jsme si ukázali, že grupy se v matematice objevují v různých podobách: jako grupy rotací, copánkové grupy a další. Právě grupy nám pomohly klasifikovat elementární částice a předpovědět existenci kvarků. V Langlandsově programu se objevují grupy, které se využívají při studiu čísel.

Abychom si to vysvětlili, budeme nejprve mluvit o číslech, s nimiž se setkáváme v každodenním životě. Každý z nás se narodil v konkrétním roce, žije v domě s konkrétním číslem, má telefonní číslo, PIN kód pro přístup k bankovnímu účtu a tak dále. Všechna tato čísla mají něco společného: každé z nich můžeme získat tak, že sečteme několik kopií čísla 1: 1 + 1 je 2, 1 + 1 + 1 je 3 a tak dále. Těmto číslům říkáme přirozená čísla.

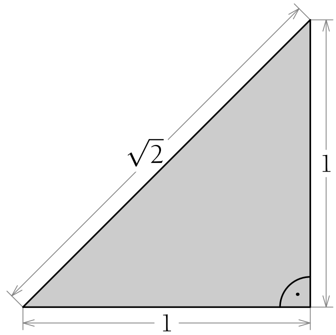
Máme také číslo 0 a záporná čísla $-1, -2, -3, \ldots$ Společně se tato čísla nazývají „celá“. Celá čísla tedy zahrnují přirozená čísla, číslo 0 a čísla opačná k přirozeným číslům.

Můžeme však narazit na čísla, která jsou o něco obecnější. Cena v dolarech je často zapisována jako $2,59, což znamená dva dolary a 59 centů. To je totéž jako 2 plus zlomek 59/100, neboli 59 × 1/100. Výraz 1/100 značí takové množství, které po sečtení 100 jeho kopií dává 1. Čísla tohoto typu se nazývají racionální čísla neboli zlomky.

Dobrým příkladem racionálního čísla je jedna čtvrtina, která je matematicky reprezentována zlomkem 1/4. Obecněji, pro libovolná dvě celá čísla m a n lze vytvořit zlomek m/n. Jestliže m a n mají společného dělitele, označme jej jako d (tedy $m = dm'$ a $n = dn'$). Číslem d pak můžeme zlomek vykrátit a místo m/n psát m'/n'. Například 1/4 může být reprezentována také jako 25/100, a tak Američané říkají, že čtvrťák je totéž jako 25 centů.

Většina čísel, s nimiž se denně setkáváme, jsou právě zlomky čili racionální čísla. Existují také čísla, která nejsou racionální. Příkladem je druhá odmocnina ze 2, kterou zapisujeme jako $\sqrt{2}$. Je to číslo, jehož druhá mocnina je rovna 2. Geometricky je $\sqrt{2}$ délka přepony pravoúhlého trojúhelníku, jehož odvěsny mají délku 1.

Ukázalo se, že ji nelze vyjádřit ve tvaru m/n, kde m a n jsou dvě přirozená čísla.[2] Můžeme ji ovšem aproximovat racionálními čísly, když postupně bereme prvních pár cifer jejího desetinného rozvoje: 1,414 2, potom 1,414 21, potom 1,414 213 a tak dále. Nehledě na to, kolik desetinných míst ponecháme, bude to stále jen přibližná hodnota – vždy totiž budou scházet desetinná místa, která jsme pominuli. Žádné číslo s konečným desetinným rozvojem nikdy přesně nevystihne $\sqrt{2}$.



Obr. 18: Pravoúhlý trojúhelník s přeponou délky $\sqrt{2}$ a s odvěsnami délky 1.

Víme, že takové číslo existuje, protože $\sqrt{2}$ je délka přepony výše vyobrazeného trojúhelníku, není ale obsaženo v systému racionálních čísel.

Takových čísel můžeme najít mnoho: $\sqrt{3}$ nebo třetí odmocnina ze 2 a další. Potřebujeme najít systematický způsob, jak taková čísla připojit k racionálním číslům. Pro názorné vysvětlení přirovnejme racionální čísla k šálku čaje. Můžeme jej vypít samotný nebo jej dochutit přidáním cukru, mléka, medu či různého koření. Čísla jako $\sqrt{2}$ a $\sqrt{3}$ pak hrají stejnou roli jako tyto přidané ingredience.

Pokusme se nejprve přidat $\sqrt{2}$. To bude analogie k přidání kostky cukru do našeho šálku čaje. Takže $\sqrt{2}$ vhodíme mezi racionální čísla a budeme pozorovat, jaký číselný systém vznikne. Budeme-li chtít v rámci tohoto systému násobit čísla, musíme do něj zahrnout všechna čísla, která jsou násobky racionálních čísel a $\sqrt{2}$. Taková čísla jsou tvaru $\frac{k}{l}\sqrt{2}$. Náš číselný systém tedy musí obsahovat všechny zlomky $\frac{m}{n}$ (racionální čísla) a všechna čísla ve tvaru $\frac{k}{l}\sqrt{2}$. Potřebujeme také sčítat, takže do systému musíme zahrnout i součty

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{l}\sqrt{2}.$$

Vidíme, že čísla v tomto tvaru již obsáhla vše, co potřebujeme. Jinými slovy, že s nimi můžeme provádět všechny běžné operace – sčítání, odčítání, násobení a dělení – a výsledkem bude opět číslo daného tvaru.[3] To představuje náš šálek čaje s kostkou cukru, která je v něm zcela rozpuštěna.

Tento nový číselný systém má jistou skrytou vlastnost, kterou racionální čísla nemají. Ukazuje se, že tento číselný systém obsahuje symetrie. A ty pro nás budou představovat pomyslnou bránu do tajuplného světa čísel.

„Symetrií“ je zde myšleno pravidlo, které jakémukoli číslu přiřadí nějaké jiné číslo. Jinými slovy, symetrie transformuje každé číslo na jiné číslo ze stejného číselného systému. Budeme říkat, že symetrie je pravidlo, pomocí něhož se každé číslo „posune“ na jiné číslo. Takové pravidlo by mělo být slučitelné s operacemi sčítání, odčítání, násobení a dělení. Zatím není zcela jasné, proč bychom se symetriemi číselného systému měli zabývat. Ale v následujícím textu si vše vysvětlíme.

Náš číselný systém má neutrální symetrii, tedy pravidlo, podle něhož se každé číslo posune samo na sebe. Je to, jako když otočíme stůl o nula stupňů a každý jeho bod zůstane na svém místě.

Náš číselný systém má také netriviální symetrii. Všimněme si, že $\sqrt{2}$ je řešením rovnice $x^2 = 2$. Pokud nahradíme x hodnotou $\sqrt{2}$, bude tato rovnost platit. Tato rovnice má ale ve skutečnosti dvě řešení: jedním z nich je $\sqrt{2}$ a druhým je $-\sqrt{2}$. Když jsme vytvářeli náš nový číselný systém, přidali jsme k racionálním číslům obě tato čísla. Přehozením obou hodnot získáme symetrii tohoto číselného systému.

Pro lepší názornost se ještě vraťme k analogii s šálkem čaje, kterou poupravíme. Řekněme, že v šálku čaje rozmícháme kostku bílého cukru a kostku hnědého cukru. První z nich je jako $\sqrt{2}$ a druhá z nich je jako $-\sqrt{2}$. Je zřejmé, že kdybychom je zaměnili, tak by se výsledná chuť čaje nezměnila. Stejně tak bude záměna $\sqrt{2}$ a $-\sqrt{2}$ symetrií našeho číselného systému.

Racionální čísla po této záměně zůstanou nezměněna.[4] To znamená, že číslo ve tvaru $\frac{m}{n} + \frac{k}{l}\sqrt{2}$ přejde na číslo $\frac{m}{n} - \frac{k}{l}\sqrt{2}$. Jinými slovy, u každého čísla změníme pouze znaménko před $\sqrt{2}$ a všechno ostatní necháme stejné.[5]

Náš číselný systém je jako motýl: čísla $\frac{m}{n} + \frac{k}{l}\sqrt{2}$ jsou jako šupinky na křídlech motýla a symetrie těchto čísel, která zaměňuje $\sqrt{2}$ a $-\sqrt{2}$, je jako symetrie motýla, která zaměňuje jeho křídla.

Obecněji můžeme uvažovat i jiné rovnice s proměnnou x, nejen $x^2 = 2$; například kubickou rovnici $x^3 - x + 1 = 0$. Pokud řešení takové rovnice nebude náležet do racionálních čísel (tak jako je tomu ve výše uvedených rovnicích), pak ho můžeme k racionálním číslům připojit. K racionálním číslům můžeme dokonce připojit řešení několika takových rovnic najednou. Tímto způsobem získáme mnoho rozdílných číselných systémů neboli, jak říkají matematici, *číselných těles*. Výraz *těleso* odkazuje na skutečnost, že tento číselný systém je uzavřený vzhledem k operacím sčítání, odčítání, násobení a dělení.

Obr. 19: Évariste Galois.

Stejně jako v případě číselného tělesa, které jsme získali přidáním $\sqrt{2}$, obecná číselná tělesa obsahují symetrie slučitelné s těmito operacemi. Symetrie daného číselného tělesa se mohou uplatňovat jedna za druhou (lze je skládat) stejně jako symetrie geometrických útvarů. Nemělo by nás tedy překvapit, že tyto symetrie tvoří grupu. Této grupě se říká *Galoisova grupa* číselného tělesa,[6] na počest francouzského matematika Évarista Galoise.

Galoisův příběh je fascinující. Je jedním z nejromantičtějších příběhů o matematicích. Byl to génius, který již ve svém mládí učinil převratné objevy, zemřel však po souboji ve svých dvaceti letech. Existují různá vysvětlení, co bylo skutečným důvodem souboje z 31. května 1832. Někteří tvrdí, že za tím stála žena, jiní zase tvrdí, že souvisel s jeho politickými aktivitami. Je zřejmé, že Galois byl při vyjadřování svých politických názorů nekompromisní a že se mu během jeho krátkého života podařilo znepřátelit mnoho lidí.

Bylo to doslova na sklonku jeho života, když uprostřed noci za svitu svíček dokončil rukopis, v němž popsal své myšlenky týkající se číselných symetrií. V podstatě se jedná o milostný dopis, ve kterém s celým lidstvem sdílí své pozoruhodné objevy. Grupy symetrií, které Galois objevil a které dnes nesou jeho jméno, jsou dalšími divy světa, stejně jako egyptské pyramidy nebo visuté zahrady v Babylonu. Rozdíl je v tom, že za nimi nemusíme cestovat v čase ani na jiný světadíl. Můžeme je obdivovat, ať jsme kdekoli. To, co je na nich tak podmanivé, není jenom jejich krása, ale také jejich využitelnost v reálném světě.

Galois předběhl svou dobu, a to bylo jeho dílu paradoxně nejvíce na škodu. Jeho myšlenky byly tak radikální, že jim jeho současníci nerozuměli. Francouzská akademie věd jeho články dvakrát odmítla a trvalo skoro 50 let, než byla jeho práce publikována a doceněna ostatními matematiky. Dnes ji považujeme za jeden z pilířů moderní matematiky.

Galois přenesl myšlenku symetrie, kterou intuitivně známe z geometrie, do popředí zájmu teorie čísel. Navíc ukázal, jak mocná tato myšlenka je.

Už před Galoisem matematici hledali explicitní vzorce pro řešení rovnic typu $x^2 = 2$ a $x^3 - x + 1 = 0$, tedy takzvaných polynomických rovnic. Je smutné, že se ve škole tyto vzorce stále vyučují, přestože od Galoisovy smrti uplynula již dvě století. Například nás nutí pamatovat si vzorec pro řešení obecné kvadratické rovnice (rovnice druhého stupně)

$$ax^2 + bx + c = 0$$

v závislosti na jejích koeficientech a, b, c. Nebudeme zde tento vzorec uvádět, abychom zbytečně nevyvolali nepříjemné vzpomínky – stačí vědět, že obsahuje druhou odmocninu.

Existuje i podobný, jen ještě komplikovanější vzorec pro řešení obecné kubické rovnice (rovnice třetího stupně)

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

který zahrnuje třetí odmocniny. Řešení polynomické rovnice (tedy vyjádření jejích kořenů pomocí druhých odmocnin, třetích odmocnin a tak dále) se s rostoucím stupněm rovnice stává čím dál komplikovanější.

Obecný vzorec pro řešení kvadratických rovnic znal už v 9. století perský matematik Al Chvárizmí (výraz „algebra“ pochází ze slova „al-džabr“, které se objevilo v názvu jeho knihy). Vzorce pro řešení kubických a kvartických rovnic (rovnic 3. a 4. stupně) byly objeveny v první polovině 16. století. Dalším přirozeným cílem se pak stala kvintická rovnice (rovnice 5. stupně). Hledání vzorce pro její řešení započalo již 300 let před Galoisem, ale během celé té doby v bádání nedošlo k žádnému pokroku. Galois si uvědomil, že si matematici celá století kladli špatnou otázku, a místo hledání explicitního vzorce zaměřil svou pozornost na grupu symetrií číselného tělesa, které získáme přidáním řešení této rovnice k racionálním číslům – tedy na to, co dnes nazýváme Galoisova grupa.

Ukazuje se, že popsat Galoisovu grupu je mnohem snazší úloha než nalézt explicitní vzorec pro řešení polynomických rovnic. I když nebudeme znát ona řešení, stejně o grupě můžeme říct něco smysluplného. Z toho pak můžeme odvodit důležité vlastnosti, které bude řešení splňovat. Stručně řečeno, Galois ukázal, že vzorce pro řešení ve tvaru kořenů (to jest ve tvaru druhých odmocnin, třetích odmocnin a tak dále) existují právě tehdy, když má odpovídající Galoisova grupa obzvlášť jednoduchou strukturu. Grupu s takovouto strukturou dnes matematici nazývají pojmem *řešitelná* grupa. Pro kvadratické, kubické a kvartické rovnice jsou Galoisovy grupy vždy řešitelné. Proto můžeme řešení těchto rovnic zapisovat pomocí kořenů. Galois ale ukázal, že grupa symetrií typické kvintické rovnice (ani rovnic vyššího stupně) řešitelná není. Z toho vyplývá, že neexistuje žádný obecný vzorec pro řešení těchto rovnic, který by byl zapsán ve formě kořenů.[7]

Nebudeme zacházet do detailů důkazu, ale abychom získali představu, jak Galoisovy grupy vypadají, uveďme si pár příkladů. Již jsme si popsali Galoisovu grupu pro případ rovnice $x^2 = 2$. Tato rovnice má dvě řešení, $\sqrt{2}$ a $-\sqrt{2}$, která přidáváme k racionálním číslům. Galoisova grupa vzniklého číselného tělesa[8] pak obsahuje dva prvky: neutrální symetrii a symetrii, která zaměňuje $\sqrt{2}$ a $-\sqrt{2}$.

Jako další příklad uvažujme kubickou rovnici popsanou výše a předpokládejme, že její koeficienty jsou racionální čísla a její tři řešení jsou iracionální čísla. Poté sestrojíme nové číselné těleso přidáním těchto řešení k racionálním číslům. Je to jako přidání tří různých přísad do našeho šálku čaje, například kostky cukru, trochy mléka a lžičky medu. Žádná symetrie tohoto číselného tělesa (šálku čaje s přísadami) nezmění samotnou kubickou rovnici, protože její koeficienty jsou racionální čísla, která se při aplikování symetrie nepohnou, a proto se každé řešení kubické rovnice (každá ze tří přísad) nutně posune na jiné řešení. Toto pozorování nám umožňuje popsat Galoisovu grupu symetrií tohoto číselného tělesa pomocí permutací těchto tří řešení. Nejdůležitější na tom všem je, že jsme tento popis získali i bez vypsání vzorce pro řešení.[9]

Stejně tak můžeme popsat Galoisovu grupu symetrií číselného tělesa, které získáme přidáním všech řešení libovolné polynomické rovnice k racionálním číslům a za pomoci permutací těchto řešení (budeme mít n řešení pro každou polynomickou rovnici n-tého stupně, jejíž řešení jsou navzájem různá a iracionální). Tímto způsobem můžeme získat mnoho informací o dané rovnici, aniž bychom vyjádřili její řešení v závislosti na jejích koeficientech.[10]

Galoisova práce je skvělým příkladem matematického vhledu. Galois nevyřešil úlohu nalezení vzorce pro řešení polynomických rovnic, jak bylo tehdy zvykem. Místo toho problém *obešel* a podíval se na něj úplně jinou optikou. Jeho nadhled navždy změnil způsob, jakým lidé přemýšlejí o číslech a rovnicích.

O 150 let později jeho myšlenky dále rozvedl Langlands. V roce 1967 si uvědomil, že existuje revoluční spojení mezi teorií Galoisových grup a mezi jinou částí matematiky, které se říká harmonická analýza. Ukazuje se, že tyto dvě oblasti, které se zdají velmi vzdálené, spolu úzce souvisejí. Langlands, krátce po svých třicátých narozeninách, shrnul své myšlenky v dopise, který zaslal významnému matematikovi Andrému Weilovi. Tento dopis se stal v matematických kruzích velmi populárním.[11] Jeho průvodní poznámka je pozoruhodná tím, jak skromná slova používá:[12]

> Pane profesore Weile, abych odpověděl na Vaše pozvání na schůzku, napsal jsem přiložený dopis. Poté co jsem ho dopsal, jsem si uvědomil, že je v něm sotva nějaké tvrzení, kterým si jsem jistý. Pokud budete ochotný si jej přečíst coby prostou spekulaci, budu Vám zavázán. Pokud ne, jsem si jistý, že máte po ruce odpadkový koš.

To, co následovalo, bylo počátkem převratné teorie, která navždy změnila způsob, jakým přemýšlíme o matematice. A tak se zrodil Langlandsův program.

Mnoho generací matematiků zasvětilo svůj život řešením problémů, které Langlands předložil. Co je tak silně inspirovalo? O tom si povíme v následující kapitole.