1. ZKRATKA

VZOREC

> V domě máte schodiště s 10 schody. Ty můžete brát po jednom, nebo po dvou. Nahoru se tak dostanete například 10 kroky po jednom schodu nebo 5 kroky po dvou schodech. Můžete použít také kombinaci kroků po jednom a po dvou schodech. Kolik takových možných kombinací existuje? Můžete je spočítat zdlouhavým postupem, v němž budete postupně určovat všechny kombinace. Jak by to ale udělal malý Gauss?

Chcete znát zkratku, jak dosáhnout zvýšení platu o 15 procent za přesně tutéž odvedenou práci? Nebo třeba zkratku, s jejíž pomocí rozmnožíte malou investici na slušnou sumu? Co takhle najít zkratku, díky níž porozumíte možnému vývoji cen akcií v příštích měsících? Máte pocit, že někdy stále jen znovu a znovu objevujete Ameriku, ale cítíte, že existuje něco, co všechny tyto vaše staronové objevy spojuje? Co byste řekli na zkratku, která vám pomůže s vaší chabou pamětí?

Ponořme se nyní do jedné z nejmocnějších zkratek, jakou kdy lidé objevili – totiž do schopnosti nacházet vzorce. Dar lidské mysli postřehnout vzorce v chaosu kolem nás zajistil našemu druhu tu nejúžasnější zkratku ze všech: zkratku k poznání budoucnosti předtím, než se z ní stane přítomnost. Dokážeme-li najít vzorec v datech popisujících minulost a přítomnost a pak tento vzorec prodloužit dál, máme šanci poznat budoucnost. Nemusíme čekat. Schopnost zjišťovat vzorce je v mých očích jádrem matematiky a její nejúčinnější zkratkou.

Vzorce nám umožňují zjistit, že ačkoli konkrétní čísla mohou být různá, pravidlo určující například jejich zvyšování může být společné. Najdeme-li pravidlo, jehož vyjádřením je vzorec, znamená to, že když se setkáme s novou sadou dat, nebudeme muset dělat tutéž práci znovu. Vzorec to udělá za nás.

Ekonomie je plná dat, v nichž lze najít vzorce, a když je správně čteme, může nás to dovést k prosperující budoucnosti. Některé vzorce mohou být ovšem zavádějící, jak ukázala světová finanční krize z roku 2008. Díky vzorcům nacházeným v datech o lidech nakažených virem můžeme porozumět trajektorii pandemie a zasáhnout dříve, než nákaza zabije příliš mnoho osob. Vzorce, které zjišťujeme ve vesmíru, nám umožňují porozumět naší minulosti i budoucnosti. Zkoumání čísel, která ukazují, jakým tempem se od nás vzdalují hvězdy, nám odhalilo vzorec, díky němuž víme, že vesmír začal velkým třeskem a směřuje do chladné budoucnosti zvané tepelná smrt.

A díky své schopnosti vysledovat v astronomických údajích vzorce také ctižádostivý mladý Gauss získal na světové scéně pověst mistra zkratky.

PLANETÁRNÍ VZORCE

Na Nový rok 1801 byla na oběžné dráze kolem Slunce, někde mezi Marsem a Jupiterem, objevena osmá planeta. Dostala jméno Ceres a její objev se na prahu nového století všeobecně považoval za předzvěst velké budoucnosti vědy. Nadšení se však během pár týdnů proměnilo v zoufalství, když tato malá planeta (která je ve skutečnosti jen planetkou čili trpasličí planetou) v blízkosti Slunce zmizela astronomům z očí a ztratila se v nepřehledném hvězdném nebi. Astronomové neměli potuchy, kam se poděla.

Pak ale dorazila zpráva, že se jistý čtyřiadvacetiletý muž z Braunschweigu ozval, že ví, kde ztracenou planetu najít. Sdělil astronomům, kam mají namířit teleskopy. A hle, jako kouzlem se tam objevila Ceres. Oním mladým mužem nebyl nikdo jiný než náš hrdina Carl Friedrich Gauss.

Od svých školních úspěchů z doby, kdy mu bylo devět let, dospěl Gauss k řadě úchvatných matematických průlomů, počínaje vypracováním způsobu, jak sestrojit sedmnáctiúhelník jen pomocí kružítka a pravítka. Byl to problém, který odolával řešení celých dva tisíce let od doby, kdy staří Řekové začali hledat důmyslné cesty k sestrojování geometrických útvarů. Gauss byl na svůj počin tak pyšný, že si začal vést matematický deník, jejž v dalších letech plnil úžasnými objevy o číslech a geometrii. Nyní ho však nejvíce zaujaly údaje o nové planetě. Lze nalézt v hodnotách zaznamenaných před zmizením planetky Ceres za Sluncem nějaká vodítka, která by naznačovala, kde lze toto těleso znovu vystopovat? Nakonec tento oříšek rozlouskl.

Jeho ohromný výkon na poli astronomických předpovědí nebylo samozřejmě žádné kouzlo. Byla to matematika. Astronomové objevili Ceres pouhou náhodou, Gauss naproti tomu za pomoci matematické analýzy odhalil za údaji o polohách planetky vzorec a s jeho pomocí zjistil, jak se těleso bude pohybovat dál. V rozeznání vzorců v dynamických pohybech vesmíru nebyl samozřejmě zdaleka první. Astronomové tuto zkratku používali k pochopení dějů na měnící se noční obloze a k předpovědím jejích budoucích změn od chvíle, kdy náš druh pochopil, že budoucnost a minulost jsou vzájemně propojeny.

Díky vzorcům ve střídání ročních období si zemědělci mohou plánovat setí plodin. Každé roční období je spojeno s určitou konfigurací hvězd. Vzorce v chování zvěře, v její migraci a páření, umožnily pravěkým lidem vypravovat se na lov v nejpříhodnější době, kdy mohli s nejnižším množstvím vydané energie pořídit největší úlovky. Kdo dokázal předpovídat zatmění, stal se jedním z nejvýznamnějších příslušníků kmene. Toho využil i Kryštof Kolumbus, když díky znalosti o brzkém zatmění Měsíce získal páku na domorodce poté, co v roce 1503 jeho bouří poničené lodě přistály na Jamajce. Indiány jeho schopnost předpovědět zmizení Měsíce natolik ohromila, že Kolumbovi vyhověli a zajistili jeho lidem potraviny.

JAKÉ JE DALŠÍ ČÍSLO?

Co obnáší hledání vzorců, to krásně vidíme na příkladech, které možná znáte ze školy – učitel předloží posloupnost čísel a žáci mají určit, které číslo bude další v pořadí. Náš učitel tyto úkoly psal křídou na tabuli a já je měl velmi rád. Čím déle mi hledání vzorce trvalo, tím větší uspokojení z nalezení zkratky jsem pociťoval. To jsem zjistil už hodně brzy. Nejlepší zkratky bývají často ty, jejichž odhalení trvá dlouho. Dají práci. Jakmile jsou ale nalezeny, stávají se součástí našeho repertoáru přístupu ke světu a můžeme je používat znovu a znovu.

Pojďme si aktivovat neurony, jimiž se dobíráme zkratek v podobě vzorců, na několika příkladech. Jaké je další číslo v následující posloupnosti?

1, 3, 6, 10, 15, 21...

To není nic obtížného. Asi jsme postřehli, že se zde pokaždé přičítá vždy o 1 číslo. Další číslo tedy je 28, protože je to 21 + 7. Těmto číslům se říká trojúhelníková, protože představují počet kamenů, z nichž lze sestavit trojúhelník, přičemž následující větší trojúhelník získáme tak, že k jedné straně přidáme novou řadu, v níž bude vždy o jeden kámen víc. Je ale možné najít zkratku, kterou bychom mohli určit sté číslo této posloupnosti, aniž bychom museli lopotně sčítat předcházejících 99 čísel? Právě tento problém řešil Gauss, když učitel Büttner zadal žákům úkol sečíst čísla od 1 do 100. Gauss našel chytrou zkratku k odpovědi tím, že sečetl čísla v párech. Jestliže Gaussův trik zobecníme, pak n-té trojúhelníkové číslo nalezneme pomocí tohoto vzorce:

$$\tfrac{1}{2} \times n \times (n + 1).$$

Jakmile se Gauss s trojúhelníkovými čísly ve třídě pana Büttnera setkal, už ho nepřestala fascinovat. V jeho matematickém deníku ke dni 10. červenci 1796 dokonce stojí řecké slovo „Eureka!“ a za ním zápis následující formule:

$$\text{num} = \Delta + \Delta + \Delta.$$

Gauss totiž objevil jednu pozoruhodnou věc: každé číslo lze zapsat jako tři trojúhelníková čísla sečtená dohromady. Například 1796 = 10 + 561 + 1225. Toto zjištění otevírá cestu k velmi účinným zkratkám, protože už není zapotřebí dokázat, že něco platí pro všechna čísla, ale nejspíš by to stačilo dokázat jen pro trojúhelníková čísla a pak využít Gaussova objevu, že každé číslo je součtem tří trojúhelníkových čísel.

Podívejme se na další příklad. Jaké je další číslo v této posloupnosti?

1, 2, 4, 8, 16...

Opět nic složitého. Další v pořadí je 32. Čísla v této posloupnosti se pokaždé zdvojnásobí. Říká se tomu exponenciální růst, řídí se jím spousta věcí, které rostou, a je důležitý pro pochopení dalšího vývoje tohoto vzorce. Uvedená posloupnost vypadá zpočátku docela nevinně. To si nejspíš myslel i jeden indický král, když souhlasil s odměnou požadovanou učencem, který vymyslel šachy. Vynálezce šachů krále požádal, aby mu dal na první políčko šachovnice jedno zrnko rýže a na každé další políčko vždy dvojnásobný počet zrnek. První řada vypadala ještě vcelku umírněně. Stačilo na ni jen 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 = 255 zrníček rýže. Sotva tak na jeden kousek suši.

Když ale královi sluhové museli dávat na další políčka šachovnice rýže stále více, brzy jim došly zásoby. Na zaplnění poloviny políček bylo zapotřebí kolem 280 000 kilogramů rýže. A to byla teprve ta lehčí polovina. Kolik zrnek rýže potřeboval král, aby vynálezci šachů zaplatil podle dohody? Vypadá to jako jeden z těch úkolů, jaké by Herr Büttner mohl zadat svým žákům. Těžká cesta k řešení je nasnadě: sečíst 64 různých čísel. Kdo by se ale s tím chtěl dřít? Jak by se asi s takovým úkolem vyrovnal Gauss?

Pro tento výpočet máme nádhernou zkratku, i když na první pohled vypadá, jako by nám cestu spíše ztěžovala. Zkratky totiž často začínají tak, že zdánlivě míří opačným směrem než tam, kam chceme. Ze všeho nejdříve dáme celkovému počtu zrnek rýže název: *X*. V matematice je to jeden z oblíbených názvů, a jak uvidíme v kapitole 3, je to sama o sobě jedna z nejmocnějších zkratek celého matematického arzenálu.

Začneme tím, že zdvojnásobíme celkový počet, který se snažíme vypočítat:

$$2 \times (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^{62} + 2^{63}).$$

Teď to vypadá, jako bychom si to spíše ztížili. Ale vydržme. Vynásobme si to:

$$= 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots + 2^{63} + 2^{64}.$$

Nyní přijde na řadu důmyslný trik. Odečteme od toho všeho *X*. Nejprve se zdá, že jsme se jenom vrátili tam, kde jsme začali:

$$2X - X = X.$$

Jak nám to má pomoci? Jakmile ale $2X$ a X nahradíme součty, které jsme si zapsali, stane se malé kouzlo:

$$2X - X = (2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots + 2^{63} + 2^{64}) - (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}).$$

Většina členů se v tomto zápisu výpočtu vyruší! V první závorce zůstane jen 2^{64} a ve druhé 1. Zbude nám tedy

$$X = 2X - X = 2^{64} - 1.$$

Ke zjištění počtu rýžových zrnek, které král musel celkem vyplatit vynálezci šachů, nepotřebujeme tedy žádné dlouhé počítání; stačí nám tento jediný výpočet, jehož výsledkem je

18 446 744 073 709 551 615.

To je víc rýže, než se jí na zeměkouli vypěstovalo za celé poslední tisíciletí. Ukazuje nám to, že někdy můžeme těžkou dřinu postavit samu proti sobě a zůstane nám něco, co lze analyzovat mnohem jednodušeji.

Jak král na své vlastní náklady zjistil, zdvojnásobování začíná zdánlivě nevinně, pak ale velmi rychle nabírá na obrátkách. Tak mocná je síla exponenciálního růstu. Pociťují ji například ti, kdo si vezmou neškodně vypadající půjčku. Úvěrová firma nabízí půjčit 1 000 liber při úroku 5 procent měsíčně, což se zdá na první pohled snesitelné. Po jednom měsíci dlužíme jen 1 050 liber. Potíž je v tom, že po každém měsíci se nová suma vždy vynásobí koeficientem 1,05. Po dvou letech tak dlužíme již 3 225 liber. Do pátého roku náš dluh naroste na 18 679 liber. To je skvělé pro toho, kdo půjčuje, dlužník však zapláče.

Skutečnost, že lidé tomuto vzorci exponenciálního růstu obvykle nerozumějí, vede k tomu, že se z něj může stát zkratka k bídě. Firmy, které nabízejí krátkodobé půjčky k překlenutí doby do výplaty, úspěšně využívají neschopnost spočítat si tento vzorec do delší budoucnosti k tomu, aby klientům vnutily smlouvy, které zpočátku vyhlížejí přitažlivě. Abychom neskončili bezmocní a bez možnosti vrátit se do bezpečí, měli bychom nebezpečí zdvojnásobování a exponenciálního růstu znát.

Děsivou rychlost exponenciálního růstu jsme na vlastní kůži a až příliš pozdě poznali během koronavirové pandemie roku 2020. Počet nakažených lidí se zdvojnásoboval v průměru každé tři dny. To pak vedlo k zahlcení zdravotnických systémů.

Důsledky exponenciálního růstu na druhé straně nabízejí matematické zdůvodnění toho, že na Zemi (pravděpodobně) nejsou žádní upíři. Upír potřebuje ke svému přežití alespoň jednou do měsíce lidskou krev. Problémem je, že jakmile si na ní pochutná, z jeho oběti se stane také upír. O měsíc později by tak muselo být na světě dvakrát tolik upírů, kteří by všichni vyhledávali další lidskou krev.

Na světě bylo k roku 2020 odhadem 7,7 miliardy lidí. Počet upírů se každý měsíc zdvojnásobí – to ale bude mít tak ničivý dopad, že za necelých 33 měsíců jediný upír přemění veškeré lidstvo na svoje příbuzné.

Jen tak pro případ, že byste narazili na upíra, nabízím ze svého matematického arzenálu užitečný trik, jak krvežíznivé monstrum odehnat. Kromě tradičních způsobů obrany, jako je česnek, zrcadla a kříže, je jedním z méně obvyklých roztrousit kolem jeho rakve semínka máku. Upíři totiž trpí duševní poruchou zvanou aritmománie, což je nutkavá touha počítat věci kolem sebe. Než Drákula spočítá, kolik zrnek máku je kolem jeho útulku rozeseto, slunce ho zažene zpět do rakve.

Aritmománie je závažné duševní onemocnění. Trpěl jím například vynálezce Nikola Tesla, jehož výzkumy elektřiny nám daly střídavý proud. Tesla byl posedlý čísly dělitelnými třemi: musel mít 18 čistých ručníků denně a kroky si počítal tak, aby se jejich počet dal dělit třemi beze zbytku. Možná nejznámějším fiktivním nositelem aritmománie je hrabě Počtář z televizního cyklu *Sezame, otevři se*: loutka upíra, která generacím malých diváků pomáhala s jejich prvními matematickými krůčky.

MĚSTSKÉ VZORCE

Podívejme se nyní na poněkud obtížnější číselnou posloupnost. Dokážeme i v ní odhalit vzorec, na němž je založena?

179, 430, 1 033, 2 478, 5 949…

K vyřešení stačí každé číslo vydělit číslem, které mu předchází, což nám ukáže, že koeficient, na jehož základě vznikají další členy posloupnosti, je číslo 2,4. Jde pořád o exponenciální růst, zajímavé ale je, co tato čísla představují ve skutečnosti.

Jsou to počty patentů udělených ve městech s postupně 250 000, 500 000, 1 milionem, 2 miliony a 4 miliony obyvateli. Ukazuje se totiž, že zvětšení populace města na 200 % přidává na jeho kreativitě dalších 40 %! Podobný vzorec růstu přitom není charakteristický pouze pro patenty.

Navzdory obrovským kulturním rozdílům mezi takovými městy, jako je Rio de Janeiro, Londýn a Kanton, existuje matematický vzorec, který všechny tyto obří městské aglomerace od Brazílie po Čínu spojuje. Jsme zvyklí charakterizovat velká města jejich geografií a historií, což jsou rysy, které individualitu míst, jako je New York nebo Tokio, zdůrazňují. To jsou však pouhé detaily, zajímavé vyprávění, které toho ale příliš nevysvětluje. Když se totiž na město podíváme matematickýma očima, začne se nám vynořovat jeden univerzální rys, který překračuje politické a geografické hranice. Tento matematický pohled odhaluje přitažlivost měst… a ukazuje, že čím větší, tím lepší.

Pomocí matematiky zjistíme, že růst každého zdroje, který město má, lze vyjádřit jediným kouzelným číslem, specifickým pro každý z těchto faktorů. Zdvojnásobení městské populace vede k tomu, že velikost sociálních a ekonomických charakteristik města se zvětší o něco více než na dvojnásobek. Pozoruhodné je, že u mnoha zdrojů tento přírůstek odpovídá zhruba 15 procentům. Srovnáme-li například města s jedním milionem a dvěma miliony obyvatel, zjistíme, že větší město má ještě o 15 procent víc než jen dvojnásobné množství restaurací, koncertních hal nebo knihoven.

Zhruba stejný vliv má velikost města i na mzdy a platy. Podívejme se na dva zaměstnance, kteří vykonávají přesně tutéž práci, avšak v různě velikých městech: plat pracovníka ve městě se dvěma miliony obyvateli bude o 15 procent vyšší než odměna zaměstnance s toutéž prací ve městě s milionem lidí. Když se velikost města znovu zdvojnásobí na 4 miliony obyvatel, plat takového zaměstnance bude o dalších 15 procent vyšší. Čím je město větší, tím v něm za tutéž práci dostaneme zaplaceno více.

Zpozorování takového vzorce může být pro podnikatele klíčem k tomu, aby z vložených peněz dostali co nejvíc. Města vypadají různě a jsou různě veliká. Firma, která pochopí, že na vnější podobě nezáleží, ale na velikosti ano, bude schopna vydělat podstatně víc jen tím, že se přesune do většího města.

Toto zvláštní, všeobecně platné škálování neobjevil ekonom ani sociolog, nýbrž teoretický fyzik, který na města aplikoval tutéž matematickou analýzu, jaká se obvykle používá při zkoumání základních zákonů ve fungování vesmíru. Brit Geoffrey West po studiu fyziky v Cambridgi odešel na Stanford, kde zkoumal vlastnosti základních částic. K objevu důsledků velikosti měst ho však podnítil až jeho nástup do čela Santa Fe Institute, ústavu, který hledá cesty, jak spojit k diskusím a společným projektům lidi z různých oborů. Velmi často se stává, že zkratka k vysvětlení záhad v jedné oblasti výzkumu vede oklikou přes zdánlivě nesouvisející území zcela jiného oboru.

A právě směs matematiky, fyziky a biologie, která na Santa Fe rozkvétala, dovedla Westa k myšlence, zda města v celém světě nemají nějaké univerzální charakteristiky, podobně jako mají své univerzální vlastnosti elektrony a fotony světla bez ohledu na to, kde se ve vesmíru nacházejí.

O matematice můžeme opodstatněně tvrdit, že tvoří jádro základních zákonů vesmíru a že dokáže vysvětlit gravitaci nebo elektřinu. Město naproti tomu tvoří zdánlivě neuchopitelná masa lidí s jejich vlastními motivacemi a touhami, lidí, kteří vedou vlastní životy. Když se ale snažíme porozumět světu kolem sebe, zjistíme, že matematika je kód, který řídí nejen náš okolní svět a všechno v něm, ale i nás samotné. Existuje dokonce vzorec pro síly, které ovládají napohled chaotické chování milionů jednotlivců.

West s týmem spolupracovníků shromáždil data z tisíců měst po celém světě. Sesbírali všechno od celkové délky elektrického vedení ve Frankfurtu po počet vysokoškolských absolventů v Boise, metropoli amerického státu Idaho. Zaznamenávali statistiky o čerpacích stanicích, osobních příjmech, chřipkových nákazách, sebevraždách, kavárnách, dokonce i o rychlosti chůze chodců. Na internetu ovšem nebylo všechno. West se například musel potýkat s čínštinou, aby rozluštil rozsáhlé soubory dat z měst po celé Číně. Když se výzkumníci pustili do analýzy všech těchto čísel, začal se před nimi vynořovat skrytý vzorec. Město, které má dvojnásobný počet obyvatel, bez ohledu na geografické umístění, vykazuje dodatečný přírůstek sociálních a ekonomických charakteristik o kouzelnou konstantu 15 procent.

Ve městech dnes žije přes 50 procent světové populace. Exponenciální přírůstek, který West při zvyšování populace měst odhalil, by mohl vysvětlovat, proč jsou města pro lidi tak přitažlivá. Jakmile se na jednom místě soustředí lidé, vzniká tím víc než pouhý součet částí. Také proto se zřejmě lidé do velkých měst přesunují. Jestliže se totiž přestěhujeme do dvakrát většího města, najednou každý máme všeho o 15 procent víc.

Toto škálování má vliv na infrastrukturu měst, ovšem v opačném směru. Dvojnásobně lidnaté město jí nebude potřebovat dvakrát tolik, ale naopak na ní ušetří. Náklady na měděné dráty, asfalt nebo kanalizační potrubí zde budou v přepočtu na osobu o 15 procent nižší. Na rozdíl od všeobecně rozšířeného názoru bude naše osobní uhlíková stopa tím nižší, čím větší bude město, v němž žijeme.

Výsledky škálování tímto koeficientem však nejsou vždy jen pozitivní. Tentýž přírůstek při zdvojnásobení velikosti města vykazuje i zločinnost, nemoci a doprava. Jestliže známe kupříkladu počet případů AIDS ve městě s pěti miliony obyvateli, pak k odhadu počtu případů v desetimilionovém městě budeme muset k prostému dvojnásobku přidat rovněž 15 procent navíc. I zde se nám objevuje magické číslo 15 %.

Má toto všeobecné škálování pro města nějaké vysvětlení? Existuje zde něco jako Newtonův gravitační zákon, který platí pro všechno od jablek přes planety až po černé díry?

Klíčem k porozumění, proč určujícím faktorem pro město nejsou jeho fyzické rozměry, ale počet jeho obyvatel, je fakt, že město netvoří budovy a silnice, ale lidé, kteří v něm žijí. Město je jeviště, na němž skuteční lidé sehrávají svůj příběh o civilizaci. Hodnota měst spočívá v tom, že fungují jako síť, která usnadňuje interakce mezi lidmi.

Znamená to, že adekvátní model města se nebude starat o to, zda se rozkládá na ostrově, v údolí nebo je kolem něj poušť, ale pojme jej jako síť interakcí mezi jeho obyvateli. Zdá se, že právě kvalita této sítě městských interakcí má onu vlastnost univerzálního škálování, kterou West objevil. Projevila se zde moc matematiky, její schopnost spatřit jednoduché struktury, které tvoří jádro našeho složitého prostředí.

Budeme-li uvažovat mezní případ, kdy v rostoucím městě je každý v kontaktu s každým, uvidíme, proč bude velké město vykazovat větší než lineární růst. Jestliže v něm žije N obyvatel, kolik může těchto N lidí absolvovat různých podání rukou? Toto číslo nám může sloužit jako horní hranice propojenosti obyvatel. Seřaďme si podání ruky od 1 do N. Občan číslo 1 si podá ruku se všemi ostatními, což činí $N - 1$ podání. Nyní totéž udělá občan číslo 2. Ten již podal ruku občanu 1, takže bude absolvovat $N - 2$ podání. Postupně bude každý další podávat ruku vždy počtu o jednoho člověka méně. Celkový počet potřesení tak je součtem čísel od 1 do $N - 1$. A jsme znovu u toho! To je přece úkol, který dostala Gaussova třída. Gauss objevil pro tento výpočet zkratku:

$$\tfrac{1}{2} \times (N - 1) \times N.$$

Co se stane s tímto měřítkem propojenosti, jestliže zdvojnásobíme N? Počet podání rukou se pouze nezdvojnásobí, ale zvýší se násobkem 2 na druhou, tedy čtyřnásobně. Počet potřesení rukou bude narůstat druhou mocninou tempa růstu populace.

Máme zde nádherný příklad toho, jak nás matematika dokáže zbavit nutnosti znovu objevovat Ameriku. Ačkoli jsme si kladli zcela jinou otázku – ohledně propojenosti v rámci sítě –, zjistili jsme, že v analýze trojúhelníkových čísel již máme k dispozici nástroj, s jehož pomocí víme, jak tato čísla narůstají. Postavy se mohou neustále měnit, scénář však zůstává stejný. Rozumíme-li scénáři, pak máme zkratku k pochopení chování jakékoli postavy, která do dramatu vstoupí. V tomto případě počet propojení mezi občany města narůstá kvadratickým tempem vůči tempu růstu městské populace.

Samozřejmě není možné, aby ve velkém městě znal každý každého. Opatrnější předpoklad by počítal s tím, že lidé se navzájem znají jen ve své čtvrti. Zde však bude škálování jen lineární a celková velikost města na něj vliv mít nebude.

Pravděpodobné je, že míra propojenosti mezi obyvateli města se pohybuje někde mezi těmito dvěma krajnostmi. Občané se znají místně a navíc mají v rámci města celou řadu vzdálenějších kontaktů. A podle všeho právě tato vzdálená propojení jsou tím, co způsobuje onen dodatečný přírůstek propojenosti, který při zdvojnásobení populace činí 15 procent. Jak si později ukážeme, takovýto typ sítě vzniká v rámci různých situací a osvědčuje se jako velmi efektivní prostředí pro vytváření zkratek.

ZAVÁDĚJÍCÍ VZORCE

Vzorce sice mohou být neuvěřitelně účinné, při jejich používání bychom nicméně měli zůstat obezřetní. Chystáme se vydat stezkou, o níž se domníváme, že víme, kam nás dovede. Někdy se však taková pěšina může vychýlit divným a nečekaným směrem. Podívejme se znovu na číselnou posloupnost, s níž jsme se už setkali:

1, 2, 4, 8, 16…

Co kdyby vám někdo řekl, že dalším členem posloupnosti není 32, ale 31?

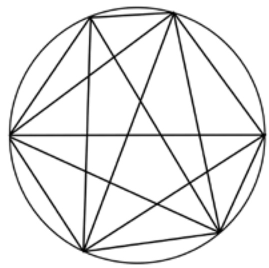
Nakreslíme-li si kruh a budeme na jeho obvodu rozmísťovat body a vzájemně je spojovat úsečkami, jaký bude maximální počet dílů, na něž bude možné kruh rozdělit? Bude-li na obvodu kruhu jeden bod, pak jej s jiným spojit nemůžeme a zůstane nám jeden díl. Když jeden bod přidáme, můžeme už oba vzájemně spojit, čímž vzniknou dvě části rozdělené narýsovanou spojnicí. Nyní přidáme třetí bod. Když narýsujeme všechny jejich spojnice, vznikne trojúhelník, který budou uvnitř kruhu obklopovat tři oblasti: kruh tak bude rozdělen na celkem čtyři díly.

Obr. 1: Prvních pět rozdělení kruhu.

Budeme-li to dělat dál, vynoří se vzorec. Počet dílů kruhu vznikajících přidáním dalšího bodu na obvodu kruhu tvoří následující posloupnost:

1, 2, 4, 8, 16…

V této chvíli lze odůvodněně odhadovat, že když přidáme další bod, počet dílů se zdvojnásobí. Potíž je v tom, že jakmile umístíme na obvod kruhu šestý bod, tento vzorec padne. Ať to zkoušíme jakkoli, maximální počet dílů vymezených spojnicemi šesti bodů bude 31. Nikoli 32!



Obr. 2: Šesté rozdělení kruhu.

Existuje vzorec, jímž lze počet vzniklých dílů vypočítat, je však o něco složitější než prosté násobení dvěma. Je-li na obvodu kruhu *N* bodů, pak maximální počet dílů, které spojením těchto bodů dostaneme, činí

$$\tfrac{1}{24}\,(N^4 - 6N^3 + 23N^2 - 18N + 24).$$

Upozorňuje nás to na to, že není možné se opírat pouze o čísla sama o sobě, ale musíme vědět, co daná data popisují. Datová věda může být nebezpečná, pokud se nezakládá na hlubokém porozumění oblasti, z níž data pocházejí.

Ukažme si jiné varování před zbrklým použitím zkratky. Jaké je další číslo v následující posloupnosti?

2, 8, 16, 24, 32…

Na první pohled vidíme několik mocnin čísla 2, poněkud narušených číslem 24. Kdo odhadl, že dalším číslem této posloupnosti je 47, tomu bych doporučil vsadit co nejdříve do loterie. Jsou to totiž čísla, která byla 26. září 2007 tažena v britské národní loterii. Už jsme si tak navykli na vyhledávání vzorců, že je často vidíme i tam, kde nic takového být nemůže. Vylosovaná čísla jsou náhodná. Nejsou založena na žádném vzorci, na žádných tajných formulích. Neexistuje žádná zkratka, s jejíž pomocí by se z nás tímto způsobem mohli stát milionáři. V kapitole 8 si nicméně ukážeme, že i v náhodných jevech lze vysledovat vzorce, které pak můžeme využít jako potenciální zkratky. K takovým zkratkám se ale dostaneme jen tak, že poodstoupíme a zaujmeme dlouhodobější pohled.

Koncept vzorce lze použít jako zkratku k pochopení, zda věci jsou, či nejsou náhodné. Souvisí to s tím, jak je daná posloupnost čísel zapamatovatelná.

ZKRATKA K DOBRÉ PAMĚTI

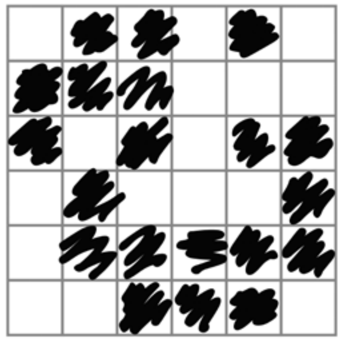
Internet chrlí každou sekundu obrovská množství dat a firmy hledají cesty, jak je co nejdůmyslněji ukládat. Základním způsobem, jak komprimovat informace, aby k jejich uložení nebylo zapotřebí tolik místa, je vyhledávání vzorců. Na tom jsou založeny technologie komprese jako JPEG nebo MP3.

Vezměme si například fotografii, kterou tvoří jen černé a bílé pixely. Na každé takové fotografii mohou být rozsáhlá místa zaplněna pouze bílými pixely. Místo nahrání každého takového pixelu jako bílého je možné použít zkratku. Lze nahrát jen data vymezující hranici souvislé oblasti bílých pixelů a přidat informaci, že jsou bílé. Ta část kódu, která bude vybarvení zajišťovat, bude obvykle mnohem menší než nahrávání každého jednotlivého pixelu v této oblasti jako bílého.

Jakékoli podobné vzorce v pixelech je možné využít k napsání kódu, který při ukládání fotografie spotřebuje mnohem méně paměti, než když se budou ukládat data pixel po pixelu. Vezměme si například šachovnici. Její obrázek má zcela zřejmý vzorec, což umožní napsat kód s jednoduchou instrukcí – 32krát opakovat černý a bílý čtverec v daném rozměru. Velikost kódu přitom zůstane stejná, i kdyby byla šachovnice sebevětší.

Domnívám, se, že vzorce jsou i klíčem k tomu, jak si data ukládají lidé. Musím se přiznat, že mám velmi špatnou paměť. Myslím, že to bylo jedním z důvodů, proč mě tak zaujala matematika, která se mi stala zbraní proti mé chabé paměti na jména, čísla a náhodné informace, v nichž nevidím žádné logické spojitosti. V dějepise jsem například nikdy nevěděl, kdy zemřela královna Alžběta I., a kdybyste mi řekli, že to bylo v roce 1603, za deset minut to zas zapomenu; ve francouzštině jsem měl vždy potíže vybavit si všechny tvary nepravidelného slovesa *aller*; v chemii jsem si nikdy nezapamatoval, zda nafialověle hoří draslík, nebo sodík. V matematice si však díky vzorcům a logice dovedu všechno odvodit. Vyhledávání vzorců nahradilo potřebu mít dobrou paměť.

Mám ale tušení, že to je i jeden ze způsobů, jak si ukládají informace a vzpomínky všichni lidé. Naše paměť je závislá na schopnosti mozku identifikovat v informaci vzorec a strukturu, s jejichž pomocí bude schopen uchovat zhuštěný program, z nějž v případě potřeby vyvolá danou vzpomínku. Zkusme si následující úkol. Dívejme se chvíli na čáranice v některých čtvercích vyobrazené mřížky 6 × 6. Teď zavřeme knihu. Dokážeme obrázek zpaměti reprodukovat? Klíčem k tomu není zapamatovat si každý ze 36 čtverců jednotlivě, ale nalézt vzorec, s jehož pomocí si vybavíme celý obrázek.



Obr. 3: Dokážete si zapamatovat, kde jsou začáraná políčka?

Obrázek má sice zhruba stejný podíl čtverců s čáranicemi, jako má šachovnice 6 × 6 černých políček, kvůli neexistenci zjevného vzorce je však mnohem těžší zapamatovat si, která políčka jsou zamalována. Obrázek totiž vznikl podle házení mincí tak, že políčko bylo pomalováno tehdy, když na minci padla hlava. Házení mincí vede z matematického hlediska se stejnou pravděpodobností k vytvoření šachovnicového vzoru, který vznikne pravidelným střídáním hlavy a orla, jako k náhodnému rozmístění klikyháků. Zapamatovat si šachovnicový vzor je ovšem mnohem snadnější.

Jakmile najdeme v obrázku vzorec, můžeme napsat recept pro jeho reprodukování. V matematice se takový recept nazývá algoritmus. Velikost algoritmu potřebného k zapamatování obrázku je výmluvným měřítkem úrovně náhodnosti, kterou obrázek obsahuje. Šachovnicový vzor je vysoce uspořádaný. Algoritmus pro jeho vytvoření je velmi krátký. Zaznamenání obrázku vzniklého házením mincí si naopak vyžádá algoritmus, který zřejmě nebude o nic kratší než algoritmus pro záznam 36 jednotlivých políček mřížky.

Stejně tak platí, že fotografie s běžně se vyskytujícími prvky bude systémem JPEG komprimována mnohem účinněji než fotografie s převahou náhodných pixelů; tam se při JPEG komprimaci příliš místa neušetří, protože v ní nejsou zjevné vzorce.

Kdokoli si dokáže něco zapamatovat, ať je to člověk, nebo stroj, využívá matematiku. Paměť potřebuje najít v datech, která se pokouší ukládat, nějaké vzorce, spojitosti, asociace a logiku. Vzorec je zkratkou k dobré paměti.